

باسمه تعالی

سؤالات امتحان نهایی درس: حسابان	رشته‌ی: ریاضی فیزیک	ساعت شروع: ۸ صبح	مدت امتحان: ۱۵۰ دقیقه
سال سوم آموزش متوسطه		تاریخ امتحان: ۱۳۹۰ / ۳ / ۸	
دانش‌آموزان و داوطلبان آزاد سراسر کشور در خرداد ماه سال ۱۳۹۰		مرکز سنجش آموزش و پرورش http://aee.medu.ir	

ردیف	سؤالات	نمره
۱	مقدار $k$ را چنان بیابید که چند جمله ای $p(x) = 2x^2 - kx^2 - x + 3$ بر $x + 1$ بخش پذیر باشد.	۰/۷۵
۲	تویی در اختیار داریم که از هر ارتفاعی که رها شود، پس از زمین خوردن به اندازه $\frac{1}{3}$ ارتفاع اولیه خود بالا می رود فرض کنید این توپ را از زمین به هوا پرتاب کرده ایم تا به ارتفاع ۵ متری برسد، می خواهیم بدانیم پس از شروع پرتاب تا زمان ایستادن، این توپ چقدر مسافت طی می کند؟	۱/۲۵
۳	برای هر دو عدد حقیقی $a, b$ ثابت کنید: $ a + b  \leq  a  +  b $	۰/۷۵
۴	نامعادله $ x - 1  \leq \sqrt{x - 1}$ را با روش هندسی حل کنید.	۱/۲۵
۵	مساحت مثلث قائم الزاویه ای ۴ سانتی متر مربع است طول وتر این مثلث را به عنوان تابعی از یک ضلع آن $(x)$ به دست آورید.	۱
۶	اگر $f(x) = 3x - 2, g(x) = \frac{1}{x - 3}$ باشد، آنگاه حاصل عبارت های زیر را به دست آورید. الف) $(3f + 2g)_{(4)}$ ب) $D_{fog}$	۱/۷۵
۷	$f(x) = \begin{cases} x + 1 & x < -2 \\ 1 & -2 < x < 1 \\ -2x & x > 1 \end{cases}$ تابع را رسم کنید و بازه هایی که در آنها تابع صعودی، نزولی یا ثابت است را مشخص کنید.	۱/۲۵
۸	درستی اتحاد $\sqrt{2} \sin(x + \frac{\pi}{4}) = \sin x + \cos x$ را ثابت کنید.	۱/۲۵
۹	در مثلثی که طول اضلاع آن ۱ و ۳ و $\sqrt{7}$ باشد، زاویه روبه روی ضلع به طول $\sqrt{7}$ چقدر است؟	۰/۷۵
۱۰	مقدار $\cos^{-1}(\sin \frac{\pi}{8})$ را حساب کنید.	۱
«ادامه‌ی سوالات در صفحه‌ی دوم»		

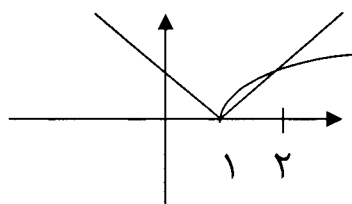
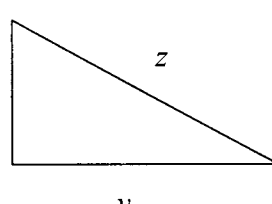
باسمه تعالی

سؤالات امتحان نهایی درس: حسابان	رشته‌ی: ریاضی فیزیک	ساعت شروع: ۸ صبح	مدت امتحان: ۱۵۰ دقیقه
سال سوم آموزش متوسطه		تاریخ امتحان: ۱۳۹۰ / ۳ / ۸	
دانش‌آموزان و داوطلبان آزاد سراسر کشور در خرداد ماه سال ۱۳۹۰		مرکز سنجش آموزش و پرورش http://aee.medu.ir	

ردیف	سؤالات	نمره
۱۱	نمودار تابعی را رسم کنید که تابع در یک همسایگی ۳ تعریف شده باشد و در این نقطه حد داشته باشد، ولی حد آن غیر از مقدار تابع در ۳ باشد.	۱
۱۲	حد توابع زیر را محاسبه کنید: الف) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - \cos 2x}{x^2}$ ب) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 8}{3x^2 - 12}$	۱/۷۵
۱۳	پیوستگی تابع $f(x) = \sqrt{x-4}$ را در نقطه $x = 4$ بررسی کنید.	۱/۲۵
۱۴	اگر $f$ تابعی باشد که در یک همسایگی نقطه $a$ تعریف شده باشد و ناصفر باشد و $f$ در $a$ مشتق پذیر باشد و $f'(a) \neq 0$ ، با استفاده از تعریف نشان دهید که $\frac{1}{f}$ نیز در $a$ مشتق پذیر است و $(\frac{1}{f})'(a) = -\frac{f'(a)}{f^2(a)}$	۱/۵
۱۵	مشتق بگیرید: (ساده کردن الزامی نیست) الف) $f(x) = \frac{(3x^2 - 1)^2}{x+1}$ ب) $g(x) = \sqrt{1 - 2 \cos 3x}$ ج) $k(x) = 2 \tan^{-1} x + 3 \sin^{-1} x + \frac{4}{x}$	۲/۲۵
۱۶	آهنگ تغییرات مساحت یک مربع را نسبت به محیط آن برای مربعی که محیط آن ۱۶ واحد است به دست آورید.	۱/۲۵
	«موفق باشید»	جمع
		۲۰

راهنمای تصحیح سؤالات امتحان نهایی درس: حسابان	رشته‌ی: ریاضی فیزیک
سال سوم آموزش متوسطه	تاریخ امتحان: ۱۳۹۰ / ۳ / ۸
دانش‌آموزان و داوطلبان آزاد سراسر کشور در خرداد ماه سال ۱۳۹۰	مرکز سنجش آموزش و پرورش http://aee.medu.ir

ردیف	راهنمای تصحیح	نمره
------	---------------	------

۱	$p(-1) = 0 \quad (./25) \Rightarrow 2(-1)^2 - k(-1)^2 - (-1) + 3 = 0 \quad (./25) \Rightarrow k = 2 \quad (./25)$	۰.۷۵
۲	<p>ارتفاع توپ قبل از <math>n</math> امین برخورد با زمین را <math>A_n</math> می‌نامیم. روشن است که</p> $A_1 = 5, A_2 = \frac{5}{3}, A_3 = \frac{5}{9}, \dots, A_n = \frac{5}{3^{n-1}}, \dots \quad (./25)$ <p>بنابر این مسافت طی شده توسط توپ بین هر دو برخورد متوالی توپ با زمین عبارت است از:</p> $10, \frac{10}{3}, \frac{10}{9}, \dots, \frac{10}{3^{n-1}}, \dots \quad (./25) \quad a = 10, q = \frac{1}{3} \Rightarrow s_n = \frac{a}{1-q} \quad (./25) \Rightarrow s_n = \frac{10}{1-\frac{1}{3}} \quad (./25) \Rightarrow$ $s_n = 15 \quad (./25)$	۱/۲۵
۳	$- a  \leq a \leq  a , - b  \leq b \leq  b  \quad (./25) \Rightarrow -( a + b ) \leq a+b \leq  a + b  \quad (./25) \Rightarrow  a+b  \leq  a + b  \quad (./25)$	۰.۷۵
۴	<p>نمودار توابع <math>y_1 = \sqrt{x-1}</math> و <math>y_2 =  x-1 </math> را رسم می‌کنیم.</p> <p>مجموعه جواب، مجموعه نقاطی است که در آن نقاط نمودار <math>y_1</math> زیر نمودار <math>y_2</math> واقع شده باشد و دو نمودار نقطه‌ی مشترکی نداشته باشند. (./۲۵)</p> <p>با توجه به شکل رسم شده <math>\{1\} \cup [2, +\infty)</math> مجموعه جواب می‌باشد. (./۲۵) رسم شکل (./۷۵)</p> 	۱/۲۵
۵	$\frac{1}{2}xy = 4 \quad (./25) \Rightarrow y = \frac{8}{x} \quad (./25) \Rightarrow z^2 = x^2 + y^2 \quad (./25) \Rightarrow z = \sqrt{x^2 + \frac{64}{x^2}} \quad (./25)$ 	۱
۶	<p>الف) <math>(3f + 2g)_{(4)} = 3f(4) + 2g(4) \quad (./25) \Rightarrow (3f + 2g)_{(4)} = 32 \quad (./5)</math></p> <p>ب) <math>D_{f \circ g} = \left\{ x \in D_g \mid g(x) \in D_f \right\} \quad (./25) \quad D_{f \circ g} = \left\{ x \neq 3 \mid \frac{1}{x-3} \in R \right\} \quad (./5) \quad D_{f \circ g} = R - \{3\} \quad (./25)</math></p>	۱/۲۵
«ادامه در صفحه ی دوم»		

راهنمای تصحیح سؤالات امتحان نهایی درس: حسابان	رشته‌ی: ریاضی فیزیک
سال سوم آموزش متوسطه	تاریخ امتحان: ۱۳۹۰ / ۳ / ۸
دانش‌آموزان و داوطلبان آزاد سراسر کشور در خرداد ماه سال ۱۳۹۰	مرکز سنجش آموزش و پرورش http://aee.medu.ir

ردیف	راهنمای تصحیح	نمره
------	---------------	------

۷	<p>رسم شکل (۰/۵)</p> <p>تابع <math>f</math> در <math>(-\infty, -2)</math> صعودی اکید و در <math>(-2, 1)</math> ثابت و در <math>(1, +\infty)</math> نزولی اکید است. (۰/۷۵)</p>	۱/۲۵
۸	$\sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2} \left(\sin x \cos \frac{\pi}{4} + \cos x \sin \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2} \left(\sin x \times \frac{1}{\sqrt{2}} + \cos x \times \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \sin x + \cos x$ <p>(۰/۲۵) (۰/۵) (۰/۵)</p>	۱/۲۵
۹	$\sqrt{7}^2 = 1^2 + 3^2 - 2 \times 1 \times 3 \times \cos \theta \quad (۰/۲۵) \Rightarrow \cos \theta = \frac{1}{2} \quad (۰/۲۵) \Rightarrow \theta = 60^\circ \quad (۰/۲۵)$	۰/۷۵
۱۰	$\cos^{-1}\left(\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{8}\right)\right) = \cos^{-1}\left(\cos\left(\frac{3\pi}{8}\right)\right) = \frac{3\pi}{8}$ <p>(۰/۵) (۰/۲۵) (۰/۲۵)</p>	۱
۱۱	<p>برقراری شرط داشتن حد و تعریف شدن در همسایگی ۳ (۰/۵) برقراری شرط مساوی نبودن حد با مقدار تابع در نقطه ۳ (۰/۵)</p>	۱
۱۲	<p>الف) <math display="block">\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1 - \cos 2x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2 \sin^2 x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 2} 2 \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 = 2</math></p> <p>(۰/۲۵) (۰/۲۵) (۰/۲۵)</p> <p>ب) <math display="block">\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 8}{3x^2 - 12} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x^2 + 2x + 4)}{3(x-2)(x+2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 2x + 4}{3(x+2)} = 1</math></p> <p>(۰/۵) (۰/۲۵) (۰/۲۵)</p>	۱/۷۵
۱۳	$\lim_{x \rightarrow 4} \sqrt{x-4} = \lim_{x \rightarrow 4^+} \sqrt{x-4} = 0, f(4) = 0$ <p>(۰/۲۵) (۰/۵) (۰/۲۵)</p> <p>پس تابع در <math>x = 4</math> پیوسته است. (۰/۲۵)</p>	۱/۲۵
«ادامه در صفحه ی دوم»		

راهنمای تصحیح سؤالات امتحان نهایی درس: حسابان	رشته‌ی: ریاضی فیزیک
سال سوم آموزش متوسطه	تاریخ امتحان: ۱۳۹۰ / ۳ / ۸
دانش‌آموزان و داوطلبان آزاد سراسر کشور در خرداد ماه سال ۱۳۹۰	مرکز سنجش آموزش و پرورش http://aee.medu.ir

ردیف	راهنمای تصحیح	نمره
۱۴	$\left(\frac{1}{f}\right)'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{f(a+h)} - \frac{1}{f(a)}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{f(a) - f(a+h)}{f(a+h)f(a)}}{h}$ $= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-(f(a+h) - f(a))}{h} \times \frac{1}{f(a+h)f(a)} = \frac{-f'(a)}{f^2(a)}$ <p style="text-align: center;">(۰/۵) (۰/۲۵) (۰/۲۵) (۰/۵)</p>	۱/۵
۱۵	<p>الف) <math>f'(x) = \frac{3(6x)(3x^2 - 1)^2(x+1) - 1 \times (3x^2 - 1)^2}{(x+1)^2}</math> (./۷۵)</p> <p>ب) <math>g'(x) = \frac{6 \sin 3x}{2\sqrt{1-2\cos 3x}}</math> (./۷۵)</p> <p>ج) <math>k'(x) = \frac{2}{1+x^2} + \frac{3}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{4}{x^2}</math> (./۷۵)</p>	۲/۲۵
۱۶	$s = x^2, p = 4x$ (./۲۵) $\Rightarrow x = \frac{p}{4}$ (./۲۵) $\Rightarrow s = \frac{p^2}{16}$ (./۲۵) $\Rightarrow s'_{(p)} = \frac{p}{8}$ (./۲۵) $\Rightarrow s'_{(16)} = 2$ (./۲۵)	۱/۲۵
	جمع کل	۲۰

همکاران محترم ضمن عرض خسته نباشید، لطفاً برای راه حل‌های صحیح غیر از راهنمای تصحیح، به تناسب بارم را تقسیم کنید. با تشکر طراحان