

باسمه تعالی

سوال‌های امتحان نهایی درس: حساب دیفرانسیل و انتگرال		رشته: علوم ریاضی	ساعت شروع: ۱۰/۳۰ صبح	مدت امتحان: ۱۲۰ دقیقه
پیش دانشگاهی		تاریخ امتحان: ۱۳۹۲ / ۲ / ۲۸		تعداد صفحات: ۱ صفحه
دانش آموزان روزانه، بزرگسال و داوطلبان آزاد سراسر کشور در نوبت خرداد ماه سال ۱۳۹۲		مرکز سنجش آموزش و پرورش http://aee.medu.ir		
ردیف	سوالات ( پاسخنامه دارد )			
۱	عبارت صحیح را در جملات زیر انتخاب کنید. الف) حد دنباله‌ی $\left\{ \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 \right\}$ برابر با $(e^2, \underline{e^2})$ است. ب) تابع $D(x) = \begin{cases} x & \text{گویا} \\ 1 & \text{گنگ} \end{cases}$ را در نظر بگیرید. تابع $f(x) = x D(x)$ در $x = 0$ (پیوسته، ناپیوسته) است.	۰/۵		
۲	عدد اعشاری $0.025\overline{37}$ را به صورت یک کسر بنویسید.	۰/۷۵		
۳	به کمک تعریف نشان دهید، دنباله‌ی $\{\sqrt{n-1}\}$ به $+\infty$ واگراست.	۱		
۴	محدوده‌ی $a$ را چنان بیابید که معادله‌ی $x^2 + x + a = 0$ در بازه‌ی $(0, 1)$ حداقل دارای یک ریشه باشد.	۱		
۵	حد $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 5x - 1}}{2x + 1}$ را در صورت وجود محاسبه کنید.	۰/۷۵		
۶	تابع هزینه‌ی تولید $x$ واحد از محصولی، روزانه $C(x) = 500 + 10x + x^2$ می‌باشد. الف) هزینه‌ی واقعی افزایش تولید از ۱۰۰ به ۱۰۱ واحد در روز چقدر است؟ ب) هزینه‌ی نهایی در این سطح تولید چقدر است؟	۱		
۷	نشان دهید نقطه‌ی $x = 2$ یک نقطه‌ی گوشه برای تابع $f(x) =  x^2 - 2x $ است. سپس اندازه‌ی تانژانت زاویه‌ی ایجاد شده در نقطه‌ی گوشه را به دست آورید.	۱/۵		
۸	با تعیین ضابطه‌ی توابع $f'$ و $f''$ ، ضابطه‌ی مشتق $n$ ام تابع $f(x) = x \operatorname{sgn}(x)$ را به دست آورید.	۱/۵		
۹	اگر $f(x) = x^3 + 2x$ باشد، معادله‌ی خط قائم بر نمودار $f^{-1}$ را در نقطه‌ی $(3, 1)$ بنویسید.	۱/۵		
۱۰	در چه نقاطی روی نمودار $x^2 - xy + y^2 = 3$ مماس بر منحنی افقی است؟	۱/۵		
۱۱	تابع $f(x) = x e^{-x}$ مفروض است. با اعمال آزمون مشتق دوم، نوع اکسترمم موضعی تابع را تعیین کنید.	۱/۵		
۱۲	مقادیر ماکسیمم و مینیمم تابع $f(x) = x + 1 + \frac{4}{x+1}$ را در بازه‌ی $[0, 2]$ در صورت وجود بیابید.	۱/۵		
۱۳	جدول رفتار و نمودار تابع $f(x) = \frac{x-1}{x+2}$ را رسم کنید.	۲		
۱۴	مساحت ناحیه‌ی تحت $y = x^2$ بالای $y = 0$ ، از $x = 0$ تا $x = 2$ را محاسبه کنید.	۱/۵		
۱۵	مقدار میانگین تابع $f$ با ضابطه‌ی $f(x) = x[x]$ را در بازه‌ی $[-1, 1]$ به دست آورید.	۱/۵		
۱۶	مشتق تابع $F(x) = x^2 \int_0^x e^{-t^2} dt$ را محاسبه کنید.	۱		
۲۰	جمع نمره		موفق باشید.	

مدت امتحان: ۱۲۰ دقیقه	رشته: علوم ریاضی	راهنمای تصحیح امتحان نهایی درس: حساب دیفرانسیل و انتگرال
تاریخ امتحان: ۱۳۹۲/۲/۲۸	پیش دانشگاهی	
مرکز سنجش آموزش و پرورش http://aee.medu.ir	دانش آموزان روزانه، بزرگسال و داوطلبان آزاد سراسر کشور در نوبت خرداد ماه سال ۱۳۹۲	
نمره	راهنمای تصحیح	ردیف

۰/۵	(الف) $e^{\frac{1}{2}}$ (۰/۲۵) (ب) پیوسته (۰/۲۵)	۱
۰/۷۵	$\frac{0.2537}{0.25} = \frac{2537-2}{99900} = \frac{2535}{99900} = \frac{169}{6660} (0.25)$	۲
۱	برای $k > 0$ دلخواه، عدد طبیعی $M$ یافت می شود که هرگاه $(0.25).a_n > K, n \geq M$ $\sqrt{n-1} > K \Rightarrow n-1 > K^2 (0.25) \Rightarrow n > K^2 + 1 (0.25) \Rightarrow M = [K^2 + 1] + 1 (0.25)$	۳
۱	$f(x) = x^3 + x + a$ روی بازه $[0, 1]$ پیوسته است (۰/۲۵). طبق قضیه ی بولزانو چون (۰/۲۵) $\begin{cases} f(0) = a \\ f(1) = 2 + a \end{cases}$ باید $a(2+a) < 0 (0.25)$ در نتیجه $-2 < a < 0 (0.25)$ .	۴
۰/۷۵	$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{ x  \sqrt{1 + \frac{5}{x} - \frac{1}{x^2}}}{x(2 + \frac{1}{x})} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x (0.25)}{2x} = -\frac{1}{2} (0.25)$	۵
۱	$C'(x) = 10 + 2x (0.25) \Rightarrow C'(100) = 210 (0.25)$ (الف) $C(101) - C(100) = 211 (0.25)$ (ب) $C'(x) = 10 + 2x (0.25) \Rightarrow C'(100) = 210 (0.25)$	۶
۱/۵	$f'_+(2) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{ x^2 - 2x }{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x(x-2)}{x-2} = 2 (0.25)$ $f'_-(2) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-x(x-2)}{x-2} = -2 (0.25)$ $\Rightarrow \tan \theta = \frac{4}{3} (0.25)$	۷
۱/۵	$f(x) = \begin{cases} x & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -x & x < 0 \end{cases} (0.25), f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{x} = 1 (0.25), f'_-(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x}{x} = -1 (0.25)$ $f'(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ -1 & x < 0 \\ \text{وجود ندارد} & x = 0 \end{cases} (0.25) \Rightarrow f''(x) = 0 (x \in R - \{0\}) (0.25)$ $f^{(n)}(x) = 0 (x \in R - \{0\}, n > 1) (0.25)$	۸
۱/۵	$(3, 1) \in f^{-1} (0.25), f'(x) = 2x^2 + 2 (0.25) \Rightarrow (f^{-1})'(3) = \frac{1}{f'(1)} = \frac{1}{5} (0.25) \Rightarrow m = -5 (0.25)$ $y - 1 = -5(x - 3) \Rightarrow y = -5x + 16 (0.25)$	۹

ادامه در برگه ی دوم

مدت امتحان: ۱۲۰ دقیقه	رشته: علوم ریاضی	راهنمای تصحیح امتحان نهایی درس: حساب دیفرانسیل و انتگرال
تاریخ امتحان: ۱۳۹۲/۲/۲۸	پیش دانشگاهی	
مرکز سنجش آموزش و پرورش http://aee.medu.ir	دانش آموزان روزانه، بزرگسال و داوطلبان آزاد سراسر کشور در نوبت خرداد ماه سال ۱۳۹۲	
نمره	راهنمای تصحیح	ردیف

۱/۵	$2x - y - xy' + 2yy' = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{(2x - y)(\cdot/25)}{(x - 2y)(\cdot/25)} \Rightarrow 2x - y = 0 \Rightarrow y = 2x (\cdot/25)$ $x^2 - 2x^2 + 4x^2 = 3 (\cdot/25) \Rightarrow x = \pm 1 \Rightarrow (1, 2) (\cdot/25), (-1, -2) (\cdot/25)$	۱۰																				
۱/۵	$f'(x) = e^{-x} - xe^{-x} (\cdot/25) \xrightarrow{f'=0} x = 1 (\cdot/25), f''(x) = -2e^{-x} + xe^{-x} (\cdot/5)$ $f''(1) = \frac{-1}{e} < 0 (\cdot/25) \Rightarrow x = 1 \text{ ماکسیمم موضعی} (\cdot/25)$	۱۱																				
۱/۵	$f'(x) = 1 - \frac{4}{(x+1)^2} (\cdot/25) \xrightarrow{f'=0} \begin{cases} x = -3 (\cdot/25) \\ x = 1 (\cdot/25) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(0) = 5 \text{ ماکسیمم مقدار} (\cdot/25) \\ f(1) = 4 \text{ مینیمم مقدار} (\cdot/25) \\ f(2) = \frac{13}{3} (\cdot/25) \end{cases}$	۱۲																				
۲	$x = -2 \text{ مجانب قائم} (\cdot/25), y = 1 \text{ مجانب افقی} (\cdot/25)$ $f'(x) = \frac{3}{(x+2)^2}, x \neq -2 (\cdot/25)$ $f''(x) = \frac{-6}{(x+2)^3}, x \neq -2 (\cdot/25)$ <table border="1" style="display: inline-table; margin-right: 20px;"> <tr> <td>x</td> <td><math>-\infty</math></td> <td><math>-2</math></td> <td><math>1</math></td> <td><math>+\infty</math></td> </tr> <tr> <td>f'</td> <td>+</td> <td></td> <td>+</td> <td></td> </tr> <tr> <td>f''</td> <td>+</td> <td></td> <td>-</td> <td></td> </tr> <tr> <td>f</td> <td><math>1 \nearrow</math></td> <td><math>+\infty</math></td> <td><math>-\infty</math></td> <td><math>1 \nearrow</math></td> </tr> </table> <p style="text-align: right;">(۰/۵)</p>	x	$-\infty$	$-2$	$1$	$+\infty$	f'	+		+		f''	+		-		f	$1 \nearrow$	$+\infty$	$-\infty$	$1 \nearrow$	۱۳
x	$-\infty$	$-2$	$1$	$+\infty$																		
f'	+		+																			
f''	+		-																			
f	$1 \nearrow$	$+\infty$	$-\infty$	$1 \nearrow$																		
۱/۵	$\Delta x = \frac{2}{n} (\cdot/25), x_i = \frac{2i}{n} (\cdot/25), f(x_i) = \left(\frac{2i}{n}\right)^2 (\cdot/25)$ $S_n = \sum_{i=1}^n \left(\frac{4i^2}{n^2}\right) \frac{2}{n} = \frac{8}{n^3} \sum_{i=1}^n i^2 = \frac{8}{n^3} \times \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{4(n+1)(2n+1)}{3n^2} (\cdot/25)$ $A = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4(n+1)(2n+1)}{3n^2} = \frac{8}{3} (\cdot/25)$	۱۴																				
۱/۵	$\bar{f} = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 x[x] dx = \frac{1}{2} \left( \int_{-1}^0 x[x] dx + \int_0^1 x[x] dx \right) = \frac{1}{2} \left( \int_{-1}^0 -x dx + 0 \right) = \frac{1}{2} \left( -\frac{1}{2} x^2 \Big _{-1}^0 \right) = \frac{1}{4} (\cdot/25)$	۱۵																				
۱	$F'(x) = \underbrace{2x}_{(\cdot/25)} \int_{\cdot}^{\Delta x} e^{-t^2} dt + \underbrace{x^2}_{(\cdot/25)} \underbrace{(e^{-2\Delta x})}_{(\cdot/25)} \times \underbrace{\Delta x}_{(\cdot/25)}$	۱۶																				
۲۰	همکاران گرامی، ضمن عرض خسته نباشید، به سایر راه حل های صحیح به تناسب نمره تعلق گیرد. با تشکر																					