

پاسخ سوالات ریاضی ۲ - حسابان - دیفرانسیل

۱۰۱- به ازای کدام مجموعه مقادیر a ، نمودار تابع $f(x) = (a-3)x^2 + ax - 1$ ، از ناحیه اول محورهای مختصات نمی‌گذرد؟

- (۱) $a \leq 2$ (۲) $0 < a \leq 2$ (۳) $2 < a < 3$ (۴) $0 < a < 3$

۱۰۱- گزینه ۱

$$0 > (x^2) \Rightarrow a - 3 < 0 \Rightarrow a < 3 \quad (1)$$

اگر دو ریشه داشته باشد باید هر دو منفی باشد که داریم:

$$\Delta > 0 \rightarrow a^2 + 4a - 12 > 0 \rightarrow (a-2)(a+6) > 0 \Rightarrow a > 2, a < -6 \quad (2)$$

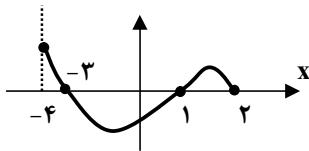
$$p = \alpha\beta > 0 \Rightarrow p = \frac{c}{a} = \frac{-1}{a-3} > 0; S = \alpha + \beta < 0 \Rightarrow s = -\frac{b}{a} = \frac{-a}{a-3} < 0 \rightarrow -a > 0 \rightarrow a < 0 \quad (3)$$

که اشتراک (۱) و (۲) و (۳) برابر $a < -6$ می‌شود. حال فرض می‌کنیم فاقد ریشه یا ریشه مضاعف باشد داریم:

$$\Delta \leq 0 \rightarrow a^2 + 4a - 12 \leq 0 \rightarrow (a-2)(a+6) \leq 0 \Rightarrow -6 \leq a \leq 2 \quad (4)$$

که اشتراک (۱) و (۴) برابر $-6 \leq a \leq 2$ است و اجتماع دو بازه برابر $a \leq 2$ می‌باشد.

۱۰۲- شکل روبه‌رو نمودار تابع $y = f(x)$ است. دامنه‌ی تابع $\sqrt{xf(x)}$ ، کدام است؟

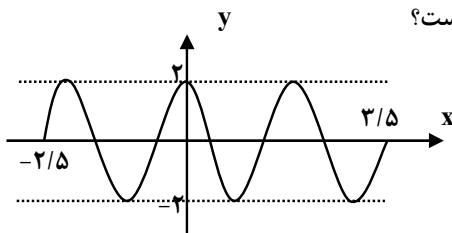


- (۱) $[0, 2]$
 (۲) $[-3, 2]$
 (۳) $[-4, -3] \cup [1, 2]$
 (۴) $[-3, 0] \cup [1, 2]$

۱۰۲- گزینه ۴ در بازه $[-4, -3]$ ، y مثبت و x منفی است که $xf(x)$ منفی می‌شود و قابل قبول نمی‌باشد. در بازه $[-3, 0]$ ، y منفی و x هم

منفی است که $xf(x)$ مثبت می‌شود و قابل قبول است. و در بازه $[1, 2]$ هم x و هم y مثبت هستند که قابل قبول است.

۱۰۳- شکل روبه‌رو قسمتی از نمودار تابع $y = a \sin(\frac{1}{\pi} + bx)$ است. a و b کدام است؟



- (۱) ۲
 (۲) ۲/۵
 (۳) ۳
 (۴) ۳/۵

۱۰۳- گزینه ۱ چون برد تابع $[-2, 2]$ است و برد تابع سینوس $[-1, 1]$ است پس $a = 2$ است. $y = 2 \sin(\frac{1}{\pi} + bx) \rightarrow y = 2 \cos \pi bx$

$$\begin{cases} x = -2/5 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow \cos \frac{-5\pi}{2} b = 0 \\ x = 3/5 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow \cos \frac{7\pi}{2} b = 0 \end{cases} \rightarrow b = 1 \quad \text{و یا} \quad T = \frac{2\pi}{\pi b} = 2 \rightarrow b = 1$$

از طرفی طبق شکل دوره تناوب ۲ است و داریم:

۱۰۴- از هر یک از ۶ منطقه کشوری، ۱۵ دانش‌آموز به یک اردوگاه فرهنگی دعوت شده‌اند. به چند طریق می‌توان ۳ دانش‌آموز از بین آن‌ها که دو به دو غیر هم منطقه‌ای هستند انتخاب کرد؟

- (۱) ۵۷۶۰۰ (۲) ۶۷۵۰۰ (۳) ۷۵۶۰۰ (۴) ۷۶۵۰۰

۱۰۴- گزینه ۲ ابتدا ۳ منطقه از ۶ منطقه را انتخاب می‌کنیم، و سپس از هر منطقه انتخاب شده یک دانش‌آموز را انتخاب می‌کنیم.

$$\binom{6}{3} \times 15 \times 15 \times 15 = 67500$$

۱۰۵- اگر α, β ریشه‌های معادله $2x^2 - 3x - 4 = 0$ باشند، مجموعه جواب‌های کدام معادله به صورت $\{1 + \frac{1}{\alpha}, 1 + \frac{1}{\beta}\}$ است؟

$4x^2 - 3x - 1 = 0$ (۴) $4x^2 - 5x - 1 = 0$ (۳) $4x^2 - 3x + 1 = 0$ (۲) $4x^2 - 5x + 1 = 0$ (۱)

۱۰۵- گزینه ۳ $\alpha + \beta = \frac{3}{2}, \alpha\beta = -2$; $S' = \alpha' + \beta' = \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + 2 = \frac{\alpha + \beta}{\alpha\beta} + 2 = \frac{5}{4}, P' = \alpha' \beta' = \frac{1}{\alpha\beta} + \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + 1 = -\frac{1}{4}$

$x^2 - S'x + P' = 0 \Rightarrow x^2 - \frac{5}{4}x - \frac{1}{4} = 0 \Rightarrow 4x^2 - 5x - 1 = 0$

۱۰۶- مجموعه جواب نامعادله $|x - 4| < 2x - 5$ کدام است؟

$(-\infty, 1 - \sqrt{6}) \cup (1, 5)$ (۴) $(1, 5) \cup (1 + \sqrt{6}, +\infty)$ (۳) $(1 - \sqrt{6}, 1 + \sqrt{6})$ (۲) $(1, 5)$ (۱)

۱۰۶- گزینه ۴ $x > 0 \Rightarrow x^2 - 4x < 2x - 5 \Rightarrow x^2 - 6x + 5 < 0 \Rightarrow x \in (1, 5)$

$x < 0 \Rightarrow -x^2 + 4x < 2x - 5 \Rightarrow x^2 - 2x - 5 > 0 \xrightarrow{x < 0} x \in (-\infty, 1 - \sqrt{6})$

۱۰۷- اگر $f(x) = 2x + 3$ و $g(f(x)) = 8x^2 + 22x + 20$ باشند، ضابطه تابع fog، کدام است؟

$4x^2 - 4x + 11$ (۴) $4x^2 - 2x + 13$ (۳) $2x^2 - 3x + 7$ (۲) $2x^2 - 7x + 3$ (۱)

۱۰۷- گزینه ۳ $g(f(x)) = 8x^2 + 22x + 20 = 2(2x + 3)^2 - (2x + 3) + 5 \Rightarrow g(x) = 2x^2 - x + 5$

$fog = f(g(x)) = 2(2x^2 - x + 5) + 3 = 4x^2 - 2x + 13$

۱۰۸- تابع $f(x) = x^2 + 2x + 1$ با دامنه $(-1, +\infty)$ مفروض است. نمودارهای دو تابع f و f^{-1} در چند نقطه متقاطع هستند؟

۴ (۴) ۳ (۳) ۲ (۲) ۱ (۱)

۱۰۸- گزینه ۴ هر تابع با معکوسش در $y = x$ متقاطع هستند بنابراین داریم:

$y = x \Rightarrow x^2 + 2x + 1 = x \Rightarrow x^2 + x + 1 = 0 \Rightarrow \Delta = 1 - 4 = -3 < 0 \Rightarrow$ غیرمتقاطع

۱۰۹- جواب کلی معادله مثلثاتی $2\sqrt{2} \sin x \cos x = \sin x + \cos x$ ، کدام است؟

$2k\pi \pm \frac{\pi}{4}$ (۴) $\frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{4}$ (۳) $\frac{2k\pi}{3} - \frac{\pi}{4}$ (۲) $k\pi + \frac{\pi}{4}$ (۱)

۱۰۹- گزینه ۳ $2\sqrt{2} \sin x \cos x = \sin x + \cos x \Rightarrow \sqrt{2} \sin 2x = \sin x + \cos x \Rightarrow 2 \sin^2 2x = 1 + \sin 2x$

به علت جواب خارجی فقط $x = 2k\pi + \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{4}$ (۱)
 $2 \sin^2 2x - \sin 2x - 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \sin 2x = 1 \rightarrow 2x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{4} \text{ (۱)} \\ \sin 2x = \frac{-1}{2} \rightarrow \begin{cases} 2x = 2k\pi - \frac{\pi}{6} \rightarrow x = k\pi - \frac{\pi}{12} \\ 2x = 2k\pi + \frac{7\pi}{6} \rightarrow x = k\pi + \frac{7\pi}{12} \end{cases} \end{cases}$
 اجتماع سه دسته جواب گزینه ۳ است.

۱۱۰- حاصل عبارت $\tan^{-1} \sqrt{x^2 + x} + \sin^{-1}(x^2 + x + 1)$ کدام است؟

π (۴) $\frac{3\pi}{4}$ (۳) $\frac{\pi}{2}$ (۲) $\frac{\pi}{4}$ (۱)

۱۱۰- گزینه ۲ با توجه به دامنه زیر رادیکال، یعنی $x^2 + x \geq 0$ و $-1 \leq (x^2 + x + 1) \leq 1$ فقط $x = 0$ را می‌توان در عبارت قرار داد.

$\tan^{-1} \sqrt{x^2 + x} + \sin^{-1}(x^2 + x + 1) \xrightarrow{x=0} \tan^{-1}(0) + \sin^{-1}(1) = 0 + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$

۱۱۱- اگر $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{\cos x} - \sqrt{\sin x}}{\cos(x + \frac{\pi}{4})} = 2^a$ باشد، آنگاه a کدام است؟

$\frac{1}{2}$ (۴) $\frac{1}{4}$ (۳) $-\frac{1}{4}$ (۲) $-\frac{1}{2}$ (۱)

۱۱۱- گزینه ۲ $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{\cos x} - \sqrt{\sin x}}{\cos(x + \frac{\pi}{4})} \stackrel{0}{=} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{-\sin x - \cos x}{-\sin(x + \frac{\pi}{4})} \stackrel{hop}{=} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{-\sin x - \cos x}{-\sin(x + \frac{\pi}{4})} = \frac{1}{\sqrt{2}} \div \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2} = 2^{-\frac{1}{2}}$

۱۱۲- اگر $f(x) = (x^2 - x - 2)\sqrt[3]{x^2 - 7x}$ باشد، حاصل $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-1+h) - f(-1)}{h}$ کدام است؟

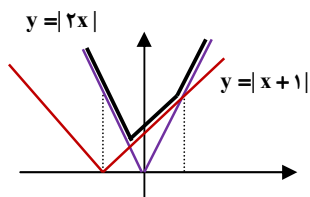
- (۱) -۶ (۲) -۳ (۳) $-\frac{3}{2}$ (۴) $-\frac{3}{4}$

۱۱۲- گزینه ۱ مشتق در نقطه $x = -1$ را می‌خواهد، که ریشه پرانتز قبل رادیکال است. پس کفایت فقط از پرانتز مشتق بگیریم و در رادیکال ضرب کنیم.

$$f'(x) = (2x-1)\sqrt[3]{x^2-7x} \xrightarrow{x=-1} f'(-1) = (-2-1)\sqrt[3]{8} = -6$$

۱۱۳- اگر $f(x) = \text{Max}\{|2x|, |x+1|\}$ ، آن‌گاه می‌نیم تابع $f(x)$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{3}$ (۲) $\frac{2}{3}$ (۳) $\frac{4}{3}$ (۴) ۲



۱۱۳- گزینه ۲ نمودار سیاه همان تابع $f(x)$ است. که کمترین مقدار آن در تقاطع دو تابع در قسمت منفی است.

$$\xrightarrow{-1 < x < 0} -2x = x+1 \rightarrow \boxed{x = -\frac{1}{3}} \rightarrow f\left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{2}{3}$$

۱۱۴- حاصل $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin(1 + \cos x)}{1 - \cos 2x}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{4}$ (۲) $\frac{1}{2}$ (۳) ۱ (۴) ۲

۱۱۴- گزینه ۱ $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin(1 + \cos x)}{1 - \cos 2x} = \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{hop}} \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{-\sin x \times \cos(1 + \cos x)}{2 \sin 2x} = \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{-\sin x \times 1}{4 \sin x \cos x} = \frac{1}{4}$

۱۱۵- اگر $f(x) = [x] + [-x]$ و $g(x) = \begin{cases} f(x) & ; x \notin \mathbb{Z} \\ f(x) - 1 & ; x \in \mathbb{Z} \end{cases}$ آنگاه تعداد نقاط ناپیوسته‌ی تابع g روی بازه $[-4, 4]$ ، کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) صفر

۱۱۵- گزینه ۴ همواره پیوسته است $g(x) = \begin{cases} f(x) & ; x \notin \mathbb{Z} \\ f(x) - 1 & ; x \in \mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow g(x) = \begin{cases} -1 & ; x \notin \mathbb{Z} \\ -1 & ; x \in \mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow g(x) = -1$

۱۱۶- کمترین مقدار تابع باضابطه‌ی $f(x) = x + \sqrt[3]{x^2 - x^3}$ ، کدام است؟

- (۱) $-\frac{1}{9}$ (۲) $-\frac{1}{6}$ (۳) $-\frac{1}{3}$ (۴) صفر

۱۱۶- گزینه ۴ به نظر می‌رسد این تابع همواره نامنفی است. برای تحقیق این موضوع داریم:

$$x + \sqrt[3]{x^2 - x^3} \geq 0 \Leftrightarrow \sqrt[3]{x^2 - x^3} \geq -x \xrightarrow{(\cdot)^3} x^2 - x^3 \geq -x^3 \Leftrightarrow x^2 \geq 0$$

۱۱۷- تابع باضابطه $f(x) = \begin{cases} ax^2 + bx & ; x < 1 \\ 2\sqrt{4x-3} & ; x \geq 1 \end{cases}$ ، بر روی مجموعه اعداد حقیقی مشتق پذیر است. b کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{2}$ (۲) ۱ (۳) $\frac{3}{2}$ (۴) ۲

۱۱۷- گزینه ۲ شرط پیوستگی: $\lim_{x \rightarrow 1^-} ax^2 + bx = \lim_{x \rightarrow 1^+} 2\sqrt{4x-3} = f(1) \Rightarrow \boxed{a+b=2}$

$$\Rightarrow 2 \times \frac{f}{2\sqrt{4x-3}} = 2ax^2 + b \xrightarrow{x=1} \boxed{2a+b=4}$$

از حل دستگاه بوجود آمده به $a=1$ و $b=1$ می‌رسیم.

۱۱۸- اگر $f(x) = \frac{x^2 - 2}{1 + x^2}$ ، $g(x) = \sqrt[3]{x-1}$ ، حاصل $f'(g(x)) \cdot g'(x)$ کدام است؟

- (۱) $\frac{2}{x}$ (۲) $\frac{2}{x^2}$ (۳) $\frac{1}{3x}$ (۴) $\frac{x-2}{x^2}$

۱۱۸- گزینه ۲ $(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x) \rightarrow (f(g(x)))' = \left(\frac{x-1-2}{1+x-1}\right)' = \frac{2}{x^2}$

۱۱۹- اگر $f(x) = xe^x$; $x > 0$ ، آنگاه خط مماس بر نمودار تابع f^{-1} در نقطه‌ای به طول e واقع بر آن، محور y ها را با کدام عرض قطع می‌کند؟

- (۱) $\frac{1}{e}$ (۲) $\frac{1}{3}$ (۳) $\frac{1}{2}$ (۴) $\frac{1}{e}$

۱۱۹- گزینه ۳ شیب مماس $m = \frac{1}{f'(1)} = \frac{1}{2e}$; $(f^{-1})'(e) = \frac{1}{f'(1)} = \frac{1}{2e}$; $f'(x) = e^x + xe^x \rightarrow f'(1) = e^1 + e^1 = 2e$; $f(x) = xe^x \rightarrow \boxed{x=1}$; $e = xe^x$

معادله مماس $y - 1 = \frac{1}{2e}(x - e) \xrightarrow{x=0} y = \frac{1}{2}$

۱۲۰- به ازای کدام مجموعه مقادیر a ، تقعر منحنی به معادله $y = x^3 + ax^2 + \frac{3}{2}x^2$ ، همواره رو به بالا است؟

- (۱) $-1 < a < 1$ (۲) $-1 < a < 2$ (۳) $-2 < a < 1$ (۴) $-2 < a < 2$

۱۲۰- گزینه ۴ $y = x^3 + ax^2 + \frac{3}{2}x^2 \rightarrow y' = 3x^2 + 2ax + 3 \rightarrow y'' = 6x + 2a = 2(3x + a)$

$\Delta < 0 \rightarrow 9a^2 - 16 < 0 \Rightarrow a^2 < \frac{16}{9} \Rightarrow \boxed{-\frac{4}{3} < a < \frac{4}{3}}$

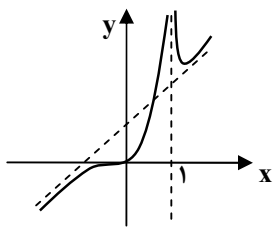
۱۲۱- مجموعه طول نقاط عطف منحنی به معادله $y = x|x^2 - 4x|$ ، کدام است؟

- (۱) $\{\frac{4}{3}\}$ (۲) $\{0, \frac{4}{3}, 4\}$ (۳) $\{\frac{4}{3}, 4\}$ (۴) $\{0, \frac{4}{3}\}$

۱۲۱- گزینه ۴ $y = x|x^2 - 4x| = \begin{cases} x^3 - 4x^2 & ; x < 0, x > 4 \\ -x^3 + 4x^2 & ; 0 \leq x \leq 4 \end{cases} \rightarrow y' = \begin{cases} 3x^2 - 8x & ; x < 0, x > 4 \\ -3x^2 + 8x & ; 0 \leq x < 4 \end{cases} \rightarrow y' = \begin{cases} 6x - 8 & ; x < 0, x > 4 \\ -6x + 8 & ; 0 < x < 4 \end{cases}$

مشتق دوم به ازای $x = \frac{4}{3}$ $6x - 8 = 0 \rightarrow x = \frac{4}{3}$ صفر است و حول آن تغییر علامت می‌دهد. همچنین مشتق دوم در $x = 0$ تعریف نشده ولی

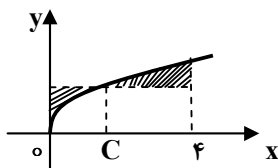
مماس در آن وجود دارد و مشتق دوم حول آن تغییر علامت می‌دهد



۱۲۲- شکل رو به رو نمودار تابع با ضابطه $f(x) = \frac{x^3 + ax^2}{x^2 + bx + c}$ است. عدد $(bc - a)$ کدام است؟

- (۱) -2 (۲) -1 (۳) 1 (۴) 2

۱۲۲- گزینه ۱ تنها مجانب قائم تابع $x = 1$ است، که چون ریشه مضاعف است پس $(x-1)^2$ در مخرج است و یعنی $b = -2$ و $c = 1$ است. از طرفی تنها ریشه تابع $x = 0$ است و باید $a = 0$ باشد. پس: $(bc - a) = -2 \times 1 - 0 = -2$



۱۲۳- در شکل زیر، مساحت دو ناحیه سایه زده برابرند، کدام است C ؟

- (۱) $\frac{4}{3}$ (۲) $\frac{16}{9}$ (۳) 2 (۴) $\frac{9}{4}$

۱۲۳- گزینه ۲ $f(c) = \frac{1}{4} \int_0^4 \sqrt{x} dx = \frac{1}{4} \left(\frac{2}{3} x^{3/2} \right) \Big|_0^4 = \frac{4}{3} \rightarrow \sqrt{c} = \frac{4}{3} \rightarrow \boxed{c = \frac{16}{9}}$

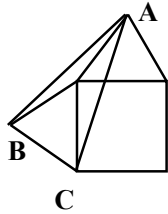
۱۲۴- حاصل انتگرال $\int_1^4 \sqrt{\left(\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{x^2}\right)^2 + 1} dx$ کدام است؟

۴ (۱) ۵ (۲) ۶ (۳) ۷ (۴)

$$\int_1^4 \sqrt{\left(\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{x^2}\right)^2 + 1} dx = \int_1^4 \sqrt{\frac{1}{16}x^4 + \frac{1}{x^4} - \frac{1}{2} + 1} dx = \int_1^4 \sqrt{\frac{1}{16}x^4 + \frac{1}{x^4} + \frac{1}{2} + 1} dx = \int_1^4 \left(\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{x^2}\right) dx$$

$$= \frac{1}{12}x^3 - \frac{1}{x} \Big|_1^4 = \frac{64}{12} - \frac{1}{4} - \left(\frac{1}{12} - 1\right) = 6$$

پاسخ سوالات هندسه ۱- هندسه ۲- هندسه تحلیلی

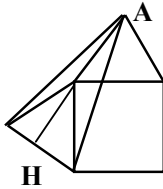


۱۲۵- در شکل روبه‌رو، طول ضلع مربع ۲ واحد است. دو مثلث متساوی‌الاضلاع بر روی دو ضلع مجاور ساخته شده است.

مساحت مثلث ABC کدام است؟

- ۱) $\sqrt{6}$ ۲) $1 + \sqrt{3}$
۳) $2 + \sqrt{3}$ ۴) ۴

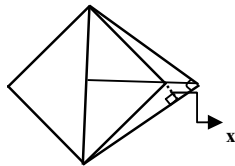
۱۲۵- گزینه ۳



$$AH = 2 + \frac{\sqrt{3}}{2}(2) = 2 + \sqrt{3} ; S = \frac{2(2 + \sqrt{3})}{2} = 2 + \sqrt{3}$$

۱۲۶- یک ضلع مثلث متساوی‌الاضلاع به طول ۴ واحد، قطر یک مربع است. کوتاهترین فاصله رأس دیگر مستطیل از ضلع این مثلث کدام است؟

- ۱) $2 - \sqrt{3}$ ۲) $\sqrt{3} - 1$ ۳) $\frac{1}{2}\sqrt{3}$ ۴) ۱



$$2 - \sqrt{3} = 2\sqrt{3} - 2 ; \text{ فاصله دو رأس} = 2\sqrt{3} - 2 ; \text{ ارتفاع مثلث} = h = \frac{\sqrt{3}}{2} \times 4 \rightarrow h = 2\sqrt{3}$$

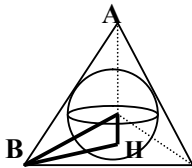
۱۲۶- گزینه ۲

$$x = \frac{1}{2}(2\sqrt{3} - 2) \rightarrow x = \sqrt{3} - 1$$

۱۲۷- در داخل یک چهاروجهی منتظم به طول یال $2\sqrt{6}$ واحد، بزرگترین کره ممکن جای گرفته است. شعاع این کره چند واحد است؟

- ۱) ۱ ۲) $\frac{4}{3}$ ۳) $\frac{3}{2}$ ۴) ۲

۱۲۷- گزینه ۱



$$AB^2 = AH^2 + BH^2 \rightarrow (2\sqrt{6})^2 = AH^2 + \left(\frac{2}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times 2\sqrt{6}\right)^2 \rightarrow AH = 4$$

$$r = \frac{1}{4}(AH) = \frac{1}{4} \times 4 = 1$$

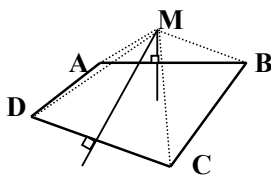
شعاع کره محاطی برابر با $\frac{1}{4}$ ارتفاع هرم است.

۱۲۸- در چهارضلعی ABCD، عمودمنصف‌های دو ضلع مقابل AB و CD در نقطه M متقاطع‌اند. اگر $BC > AD$ باشد، کدام نابرابری همواره

صحیح است؟

- ۱) $\widehat{AMB} > \widehat{BMC}$ ۲) $\widehat{CAB} > \widehat{CAD}$ ۳) $\widehat{BMC} > \widehat{AMD}$ ۴) $\widehat{CMD} > \widehat{AMB}$

۱۲۸- گزینه ۳

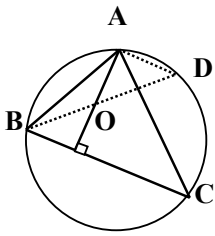


هر نقطه روی عمودمنصف فاصله‌اش از دو سرپاره خط به یک اندازه است

$$MB = MA, MC = MD ; \text{ فرض: } BC > AD$$

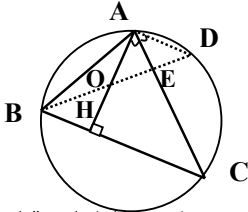
با توجه به عکس قضیه لولا داریم: $\widehat{BMC} > \widehat{AMD}$

۱۲۹- در شکل روبه‌رو، O محل تلاقی ارتفاع‌های مثلث ABC است. زاویه \widehat{AOD} برابر کدام است؟



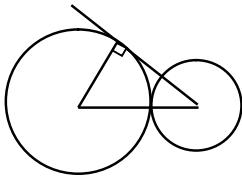
- (۱) \widehat{OBC}
 (۲) \widehat{CAD}
 (۳) \widehat{OAC}
 (۴) \widehat{ADO}

۱۲۹- گزینه ۴
 $\widehat{AOH} = \widehat{AOD}, \widehat{H} = \widehat{E} \rightarrow \widehat{OBH} = \widehat{OAE}, \widehat{OBH} = \widehat{EAD} = \frac{\widehat{DC}}{2} \Rightarrow \widehat{OAE} = \widehat{EAD} \Rightarrow \widehat{AOD} = \widehat{ADO}$



۱۳۰- دو دایره به شعاع‌های ۴ و $10/5$ واحد مماس بیرون‌اند. از مرکز دایره کوچکتر، مماس بر دایره بزرگتر رسم می‌کنیم. طول این قطعه مماس چقدر است؟

- (۱) ۸
 (۲) $4\sqrt{5}$
 (۳) $4\sqrt{6}$
 (۴) ۱۰



۱۳۰- گزینه ۴
 $(4 + 10/5)^2 = (10/5)^2 + x^2 \rightarrow x^2 = (14/5 - 10/5)(14/5 + 10/5) \rightarrow x^2 = 4 \times 25 \rightarrow x = 10$

۱۳۱- تصویر دو نقطه $A(2, 4)$ و $B(-6, 2)$ را تحت تبدیل $D(x, y) = (-\frac{1}{2}y, \frac{1}{2}x + 1)$ نقاط A' و B' می‌نامیم. زاویه بین دو خط AB و $A'B'$ چند درجه است؟

- (۱) ۳۰
 (۲) ۶۰
 (۳) ۹۰
 (۴) ۱۸۰

۱۳۱- گزینه ۳
 $A(2, 4) \xrightarrow{D} A'(-2, 2); B(-6, 2) \xrightarrow{D} B'(-1, -2)$

بر هم عمودند $\Rightarrow m_{AB} \times m_{A'B'} = -1 \rightarrow m_{AB} = \frac{4-2}{2+6} = \frac{1}{4}, m_{A'B'} = \frac{-2-2}{-1+2} = -4$

۱۳۲- نقطه O و خط d در خارج صفحه P مفروض‌اند، در کدام حالت فقط یک خط گذرنده بر نقطه O موازی صفحه P و متقاطع با خط d، وجود دارد؟

- (۱) $d \subset P$
 (۲) $d \parallel P$
 (۳) $d \cap P \neq \emptyset$
 (۴) صفحه گذرنده بر O و d موازی صفحه P

۱۳۲- گزینه ۳ برای گزینه‌های ۱ و ۲ لزوماً خطی وجود ندارد. برای گزینه ۴ بیشمار خط وجود دارد.

۱۳۳- اگر $a = i - 2j + 2k$ و $b = 2j + 2k$ و $c = 4i + j - 2k$ باشند، تصویر بردار $(a \times b) \times c$ روی محور xها کدام است؟

- (۱) ۱
 (۲) ۲
 (۳) ۳
 (۴) ۴

۱۳۳- گزینه ۱
 $a \times b = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{vmatrix} = (-4, -2, 2), (a \times b) \times c = \begin{vmatrix} -4 & -2 & 2 \\ 4 & 1 & -2 \end{vmatrix} = (1, 4, 4)$

۱۳۴- از نقطه‌ی $A = (5, -2, 1)$ صفحه‌ای بر خط به معادله $(x = t + 1, y = -2t + 1, z = 2t - 3)$ عمود شده است. مختصات نقطه‌ی تلاقی این خط و صفحه عمود، کدام است؟

- (۱) $(2, -1, -1)$
 (۲) $(1, 1, -2)$
 (۳) $(4, 5, 3)$
 (۴) $(3, -2, 1)$

۱۳۴- گزینه ۴
 $\vec{u} = (1, -2, 2) \rightarrow 1(x - 5) - 2(y + 2) + 2(z - 1) = 0 \rightarrow x - 2y + 2z = 11$

$(t + 1) - 2(-2t + 1) + 2(2t - 3) = 11 \rightarrow 9t = 18 \rightarrow t = 2 \rightarrow O(3, -2, 1)$

۱۳۵- صفحه گذرا بر دو خط متقاطع (D): $\begin{cases} 2x+y=3 \\ 2y-z=0 \end{cases}$ و (D'): $\frac{x+1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{3}$ محور Z را با کدام ارتفاع قطع می‌کند؟

(۱) $-5/8$ (۲) $-5/6$ (۳) $5/8$ (۴) $5/6$

۱۳۵- گزینه ۲ $u_D = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{vmatrix} = (-1, 2, 4)$ ، $u_{D'} \times u' = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = (2, 11, -5)$ ، $u_D \times u' =$ نرمال صفحه

نقطه $(-1, 0, -1)$ از D' بر صفحه هم قرار دارد.

$2(x+1) + 11(y-0) - 5(z+1) = 0 \rightarrow 2x + 11y - 5z = 3 \xrightarrow{x=0, y=0} z = \frac{-3}{-5} = 5/6$

۱۳۶- مرکز دایره‌ای بر روی نیمساز ناحیه‌ی اول است. اگر این دایره از نقطه‌ی $A(6, 3)$ گذشته و بر خط به معادله‌ی $y = 2x$ مماس شود. شعاع آن کدام است؟

(۱) $\sqrt{5}$ (۲) $\sqrt{6}$ (۳) $2\sqrt{2}$ (۴) $\sqrt{10}$

۱۳۶- گزینه ۱ $(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = R^2 \xrightarrow{\alpha=\beta} (\alpha-\alpha)^2 + (3-\alpha)^2 = R^2$

فاصله مرکز از خط برابر شعاع است. $R = \frac{|2\alpha - 3|}{\sqrt{4+1}} \rightarrow R = \frac{\alpha}{\sqrt{5}}$

$(\alpha-\alpha)^2 + (3-\alpha)^2 = \frac{\alpha^2}{5} \rightarrow \frac{9}{5}\alpha^2 - 18\alpha + 9 = 0 \rightarrow \alpha = 5 \rightarrow R = \sqrt{5}$

۱۳۷- نقطه‌ی $S(2, 1)$ رأس یک سهمی است که محور تقارن آن موازی محور y ها است. و از نقطه‌ی $(0, 5)$ می‌گذرد. معادله خط هادی آن کدام است؟

(۱) $y = \frac{1}{4}$ (۲) $y = \frac{1}{2}$ (۳) $y = \frac{3}{4}$ (۴) $y = \frac{3}{2}$

۱۳۷- گزینه ۳ $(x-2)^2 = 4a(y-1) \xrightarrow{(0,5)} 4 = 4a \times 4 \rightarrow a = \frac{1}{4}$; $y = 1 - \frac{1}{4} \rightarrow y = \frac{3}{4}$ سهمی قائم است.

۱۳۸- با دوران محورهای مختصات به اندازه مناسب، معادله مقطع مخروطی $\sqrt{3}xy + y^2 = 1$ به کدام صورت نوشته می‌شود؟

(۱) $3x^2 - y^2 = 2$ (۲) $2x^2 - 3y^2 = 2$ (۳) $3x^2 + y^2 = 2$ (۴) $2x^2 + 3y^2 = 2$

۱۳۸- گزینه ۱ $t^2 - (a+c)t - \frac{\Delta}{f} = 0 \rightarrow t^2 - t - \frac{3}{4} = 0 \rightarrow \begin{cases} t_1 = \frac{3}{2} \\ t_2 = -\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}y^2 = 1 \Rightarrow 3x^2 - y^2 = 2$

۱۳۹- از رابطه‌ی ماتریسی $\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ ، سطر اول ماتریس A ، کدام است؟

(۱) $[-12 \quad -17]$ (۲) $[-21 \quad 30]$ (۳) $[-17 \quad 30]$ (۴) $[12 \quad -21]$

۱۳۹- گزینه ۴ $\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ وارون $= \frac{1}{-2} \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$ ، $\begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ وارون $= \frac{1}{-1} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -5 \end{bmatrix}$

$A = \frac{1}{-2} \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -5 \end{bmatrix} = \frac{1}{-2} \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & 6 \\ 7 & -12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & -21 \\ -17 & 30 \end{bmatrix}$

۱۴۰- اگر $A = \begin{bmatrix} 0 & -\tan \alpha \\ \tan \alpha & 0 \end{bmatrix}$ و I ماتریس همانی مرتبه ۲ باشد، سطر اول ماتریس $(I-A)^{-1}(I+A)$ ، کدام است؟

(۱) $[\cos 2\alpha \quad -\sin 2\alpha]$ (۲) $[\cos 2\alpha \quad \sin 2\alpha]$ (۳) $[\sin 2\alpha \quad \cos 2\alpha]$ (۴) $[-\sin 2\alpha \quad \cos 2\alpha]$

۱۴۰- گزینه ۱ $(I-A)^{-1} = \left(\begin{bmatrix} 1 & \tan \alpha \\ -\tan \alpha & 1 \end{bmatrix} \right)^{-1} = \frac{1}{1+\tan^2 \alpha} \begin{bmatrix} 1 & -\tan \alpha \\ +\tan \alpha & 1 \end{bmatrix}$; $(I+A) = \begin{bmatrix} 1 & 1-\tan \alpha \\ 1+\tan \alpha & 1 \end{bmatrix}$

$(I-A)^{-1}(I+A) = \frac{1}{1+\tan^2 \alpha} \begin{bmatrix} 1 & -\tan \alpha \\ +\tan \alpha & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -\tan \alpha \\ \tan \alpha & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \frac{1-\tan^2 \alpha}{1+\tan^2 \alpha} & \frac{-2\tan \alpha}{1+\tan^2 \alpha} \\ \frac{2\tan \alpha}{1+\tan^2 \alpha} & \frac{1-\tan^2 \alpha}{1+\tan^2 \alpha} \end{bmatrix} = [\cos 2\alpha \quad -\sin 2\alpha]$

پاسخ سوالات آمار - جبر و احتمال - ریاضیات گسسته

۱۴۱- تمام داده‌های نمودار ساقه و برگ زیر را سه برابر کرده، سپس ۴۰ واحد از آنها کم می‌کنیم. میانگین داده‌های جدید کدام است؟

ساقه	برگ					۲۴۵ (۲)	۲۴۰ (۱)
	۸	۰	۱	۵			
۹	۲	۴	۶	۷		۲۵۵ (۴)	۲۵۰ (۳)
۱۰	۰	۰	۳	۴	۸		

$$\bar{x} = \frac{2(80) + 4(90) + 5(100) + 40}{12} = \frac{1140}{12} = 95, \quad \bar{y} = 3\bar{x} - 40 \rightarrow \bar{y} = 3(95) - 40 = 245 \quad \text{گزینه ۲ - ۱۴۱}$$

۱۴۲- در ۱۲ داده‌ی آماری مجموع تمام داده‌ها ۷۲ و مجموع مجذورات آنها ۴۸۰ می‌باشد. ضریب تغییرات این داده‌ها کدام است؟

$$\frac{2}{5} (۴) \quad \frac{1}{3} (۳) \quad \frac{2}{9} (۲) \quad \frac{1}{4} (۱)$$

$$n=12, \sum x_i = 72, \sum x_i^2 = 480; \bar{x} = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{72}{12} = 6; \sigma^2 = \frac{\sum x_i^2}{n} - \bar{x}^2 = \frac{480}{12} - 6^2 = 4 \rightarrow \sigma = 2 \quad \text{گزینه ۳ - ۱۴۲}$$

$$C_v = \frac{\sigma}{\bar{x}} = \frac{2}{6} \rightarrow C_v = \frac{1}{3};$$

۱۴۳- کدام عدد کلیت حکم « هر عدد طبیعی را می‌توان به صورت مجموع چند عدد متوالی نوشت » را نقض می‌کند؟

$$74 (۴) \quad 72 (۳) \quad 64 (۲) \quad 56 (۱)$$

گزینه ۳ - ۱۴۳

۱۴۴- حداقل چند زوج مرتب به صورت (a, b)، با مختص‌های اعداد صحیح و مثبت انتخاب کنیم، تا مطمئن باشیم در دو زوج انتخابی، جمع

مختص‌های اول و جمع مختص‌های دوم، اعداد زوج هستند؟

$$6 (۴) \quad 5 (۳) \quad 4 (۲) \quad 3 (۱)$$

گزینه ۳ - ۱۴۴ اگر ۴ زوج به فرم (زوج، زوج) (زوج، فرد) (فرد، زوج) (فرد، فرد) داشته باشیم هیچ دو زوجی این خاصیت را ندارند، ولی

با اضافه شدن یک زوج به مطلوب سوال می‌رسیم. بنابراین حداقل ۵ زوج مرتب نیاز است.

$$\{a, b, \{b, a\}, \{a, b\}\} = \{a, b, \{a, b\}\} \rightarrow n=3 \rightarrow 2^3 = 8 \quad \text{هشت زیرمجموعه دارد که در ۴ تای آن عضو وجود ندارد}$$

۱۴۵- اگر $A_i = [-i, \frac{9-i}{2}]$, $i \in \{1, 2, 3, \dots, 9\}$ ، آنگاه مجموعه $(A_7 \cap A_8) - (A_1 \cap A_7)$ کدام است؟

$$\emptyset (۴) \quad [-1, 1] (۳) \quad [-2, -1) \cup [1, 2] (۲) \quad [-2, -1) \cup (1, 2] (۱)$$

$$A_1 = [-1, 4], A_7 = [-2, 3/5], A_8 = [-5, 2], A_9 = [-7, 1]; \quad \text{گزینه ۱ - ۱۴۵}$$

$$A_7 \cap A_8 = [-2, 2], \quad A_1 \cap A_7 = [-1, 1] \rightarrow (A_7 \cap A_8) - (A_1 \cap A_7) = [-2, -1) \cup (1, 2]$$

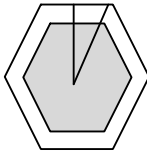
۱۴۶- اگر $A = \{k \in \mathbb{Z} : |k-3| \leq 2\}$ و $B = \{2k-1 | k \in \mathbb{Z}, 1 \leq k \leq 5\}$ ، آنگاه مجموعه $(A \times B) \cap (B \times A)$ چند عضو دارد؟

$$16 (۴) \quad 9 (۳) \quad 8 (۲) \quad 6 (۱)$$

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}, B = \{1, 3, 5, 7, 9\}, \quad |(A \times B) \cap (B \times A)| = |A \cap B|^2 = 3^2 = 9 \quad \text{گزینه ۳ - ۱۴۶}$$

۱۴۷- در داخل یک شش ضلعی منتظم به ضلع $2\sqrt{3}$ واحد، نقطه‌ای به تصادف انتخاب می‌شود. با کدام احتمال فاصله این نقطه از هر ضلع شش ضلعی بیشتر از یک واحد است؟

(۱) $\frac{4}{9}$ (۲) $\frac{2}{3}$ (۳) $\frac{5}{9}$ (۴) $\frac{3}{4}$



۱۴۷- گزینه ۱ فاصله مرکز تا ضلع کوچک = ۲ ، فاصله مرکز تا ضلع بزرگ = $\frac{\sqrt{3}}{2} \times 2\sqrt{3} = 3$

؛ $x = \frac{4\sqrt{3}}{3}$ ، $\frac{x}{2\sqrt{3}} = \frac{2}{3} \rightarrow x = \frac{4\sqrt{3}}{3}$;

$P(A) = \frac{S'}{S} = \left(\frac{x}{a}\right)^2 = 1 - \left(\frac{\frac{4\sqrt{3}}{3}}{2\sqrt{3}}\right)^2 = \frac{4}{9}$; مساحت شش ضلعی کوچک = S' ، مساحت شش ضلعی بزرگ = S

۱۴۸- اگر A و B دو پیشامد از فضای نمونه S باشند، به طوری که $P(A) = 0/6$ ، $P(B) = 0/7$ و $P(A \cap B) = 0/2$ باشند، آنگاه حاصل $P(A' \cap B)$ کدام است؟

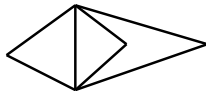
(۱) $0/1$ (۲) $0/3$ (۳) $0/4$ (۴) $0/5$

۱۴۸- گزینه ۲ $P(A \cap B) = 0/2$ ، $P(A \cap B') = P(A) - P(A \cap B) \rightarrow 0/2 = 0/6 - P(A \cap B) \rightarrow P(A \cap B) = 0/4$

$P(A' \cap B) = P(B \cap A') = P(B - A) = P(B) - P(B \cap A) = 0/7 - 0/4 \rightarrow P(A' \cap B) = 0/3$

۱۴۹- اگر A ماتریس مجاورت گراف G ، و درایه‌های واقع در سطر i ام و ستون j ام ماتریس A^T اعداد «۴،۴،۲،۲» باشند، گراف G دارای چند دور است؟

(۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۵ (۴) ۶



درجات رئوس گراف داده شده است.

مطابق شکل این گراف ۳ دور به طول ۳ و ۳ دور به طول ۴ دارد.

۱۴۹- گزینه ۴

۱۵۰- عدد چهار رقمی \overline{aabb} مربع کامل است. باقیمانده‌ی تقسیم عدد دو رقمی \overline{ab} بر عدد ۱۳ کدام است؟

(۱) ۹ (۲) ۱۰ (۳) ۱۱ (۴) ۱۲

$\overline{aabb} = 1000a + 100a + 10b + b = 11(100a + b) = k^2 \rightarrow 100a + b = 11m^2 \rightarrow a = 7, b = 4$

۱۵۰- گزینه ۱

$\overline{ab} = 74 = 5(13) + 9 \rightarrow \boxed{r=9}$

۱۵۱- در تقسیم عدد طبیعی سه رقمی a بر عدد طبیعی b خارج قسمت ۲۱ و باقیمانده ۳۷ می‌باشد، چند عضو از مجموعه جواب‌های a مضرب ۵ می‌باشند؟

(۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

$a = 21b + 37, r < b \rightarrow 37 < b$; $21b + 37 < 1000 \rightarrow b \leq 45 \rightarrow$

۱۵۱- گزینه ۲

دو مقدار a مضرب ۵ می‌باشند $b = 38 \rightarrow a = 835$; $b = 43 \rightarrow a = 940$

۱۵۲- به ازای چند عدد طبیعی کوچکتر از ۵۰، عدد $7^n + 42$ بر ۴۳ بخش پذیر است؟

(۱) ۶ (۲) ۷ (۳) ۸ (۴) ۹

$7^n + 42 \equiv 0 \rightarrow 7^n \equiv 1$; $7^2 \equiv 6, 7^3 \equiv -1, 7^4 \equiv -7, 7^5 \equiv -6, 7^6 \equiv 1, \dots$

۱۵۲- گزینه ۳

و این یعنی به ازای ۸ عدد $n = 6, 12, 18, 24, 30, 36, 42, 48$ عدد $7^n + 42$ بر ۴۳ بخش پذیر است.

۱۵۳- به چند طریق می‌توان ۹ کتاب یکسان را در ۵ قفسه متمایز جای داد به طوری که در هر قفسه، لااقل یکی از آنها قرار داده شود؟

۷۰ (۴) ۵۶ (۳) ۴۲ (۲) ۳۵ (۱)

۱۵۳- گزینه ۴ تعداد جواب‌های طبیعی $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 9 - x_i \geq 1 \rightarrow \binom{n-1}{k-1} = \binom{9-1}{5-1} = \binom{8}{4} = \frac{8 \times 7 \times 6 \times 5}{4 \times 3 \times 2 \times 1} = 70$

۱۵۴- پنج مهره سفید با شماره‌های ۱ تا ۵ و همچنین پنج مهره سیاه با شماره‌های ۱ تا ۵ و یکسان را در ظرفی قرار می‌دهیم. به تصادف دو مهره

از بین آنها بیرون می‌آوریم، اگر مجموع شماره‌های هر دو مهره ۶ باشد، با کدام احتمال، هر دو مهره هم‌رنگ هستند؟

$\frac{2}{5}$ (۴) $\frac{5}{9}$ (۳) $\frac{4}{9}$ (۲) $\frac{2}{5}$ (۱)

۱۵۴- گزینه ۲

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} 1w \\ 5w \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1w \\ 5b \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1b \\ 5w \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1b \\ 5b \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2w \\ 4w \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2w \\ 4b \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2b \\ 4w \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2b \\ 4b \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3w \\ 3b \end{bmatrix} \right\}; A = \left\{ \begin{bmatrix} 1w \\ 5w \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1b \\ 5b \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2w \\ 4w \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2b \\ 4b \end{bmatrix} \right\}; P(A) = \frac{4}{9}$$

۱۵۵- تابع احتمال به صورت $P(X=x) = \frac{\binom{5}{x}}{A}$; $x=0,1,2,3,4,5$ تعریف شده است. با محاسبه‌ی عدد A ، مقدار $P(X=2 \text{ یا } 3)$ کدام است؟

$\frac{5}{8}$ (۴) $\frac{9}{16}$ (۳) $\frac{7}{16}$ (۲) $\frac{3}{8}$ (۱)

$P(X=0) + P(X=1) + \dots + P(X=5) = 1 \rightarrow \frac{1}{A} + \frac{5}{A} + \frac{10}{A} + \frac{10}{A} + \frac{5}{A} + \frac{1}{A} = 1 \rightarrow \boxed{A=32}$ ۱۵۵- گزینه ۴

$P(X=2 \text{ یا } 3) = \frac{10}{A} + \frac{10}{A} = \frac{20}{32} = \frac{5}{8}$