



www.riazisara.ir **سایت ویژه ریاضیات**

درسنامه ها و جزوه های دروس ریاضیات

دانلود نمونه سوالات امتحانات ریاضی

نمونه سوالات و پاسخنامه کنکور

دانلود نرم افزارهای ریاضیات

...

کانال سایت ریاضی سرا در تلگرام:

<https://telegram.me/riazisara>

(@riazisara)

ریاضی، ریاضی ۳ و آمار و مدل سازی، - ۱۳۹۶۰۴۲۳

۲۶- مدل ریاضی اندازه گیری ضلع یک مربع به صورت $a = \lambda + E$ است، اگر مطمئن باشیم خطای اندازه گیری این طول کمتر از 0.25 واحد است، آنگاه خطای حاصل در مساحت مربع کمتر از کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

شما پاسخ نداده اید

۲۷- «نوع یک متغیر تصادفی در علم آمار»، خود یک متغیر تصادفی است؛ نوع این متغیر کدام است؟

- (۱) کمی پیوسته (۲) کمی گسسته (۳) کیفی ترتیبی (۴) کیفی اسمی

شما پاسخ نداده اید

۲۸- در جدول فراوانی تجمعی داده های دسته بندی شده به شکل زیر، زاویه مرکزی متناسب با فراوانی مطلق دسته وسط در نمودار دایره ای 90° درجه است، فراوانی مطلق دسته چهارم کدام است؟

حدود دسته	۱۲-۱۴	۱۴-۱۶	۱۶-۱۸	۱۸-۲۰	۲۰-۲۲	۱۵ (۲)	۱۴ (۱)
فراوانی تجمعی	۶	۱۷	x	۴۸	۶۰	۱۸ (۴)	۱۶ (۳)

شما پاسخ نداده اید

۲۹- در نمودار ساقه و برگ زیر، داده های آماری، اعداد طبیعی دو رقمی هستند. کدام گزینه در مورد شاخص های مرکزی این داده ها درست است؟

ساقه	برگ
۱	۰ ۰ ۱
۳	۱ ۱ ۱ ۲ ۵
۴	۱ ۲ ۲ ۴

- (۱) مد < میانه < میانگین
(۲) میانه < مد < میانگین
(۳) میانه < میانگین < مد
(۴) میانگین < میانه < مد

شما پاسخ نداده اید

۳۰- اگر X متغیر کمی باشد، از اطلاعات جدول زیر، ضریب تغییرات این داده ها کدام است؟

x_j	-۱۲	-۳	-۲	-۱	۰	۱	۲
f_j	۱	۳	۱	۳	۶	۲	۲

- (۱) $\frac{1}{12}$ (۲) $\frac{1}{8}$
(۳) $\frac{1}{6}$ (۴) $\frac{1}{4}$

شما پاسخ نداده اید

۳۱- در کیسه ای ۵ مهره با شماره های ۱ تا ۵ وجود دارد. این مهره ها را به طور تصادفی پی در پی بدون جای گذاری خارج می کنیم. با کدام احتمال دو مهره با شماره فرد متوالیاً خارج نمی شوند؟

- (۱) 0.1 (۲) 0.15 (۳) 0.2 (۴) 0.25

شما پاسخ نداده اید

۳۲- در آزمایشگاهی ۵ موش سفید و ۶ موش سیاه موجود است. به تصادف ۳ موش از بین آنها خارج می کنیم. با کدام احتمال لااقل یکی از موش ها سفید است؟

- (۱) $\frac{8}{11}$ (۲) $\frac{9}{11}$ (۳) $\frac{28}{33}$ (۴) $\frac{29}{33}$

شما پاسخ نداده اید

۳۳- A و B دو پیشامد در فضای نمونه ای S هستند. پیشامد «فقط A رخ دهد یا فقط B رخ دهد.» در کدام گزینه بیان شده است؟

- (۱) $A \cup B$ (۲) $S - (A \cap B)$ (۳) $A' \cap B'$ (۴) $(A - B) \cup (B - A)$

شما پاسخ نداده اید

۳۴- چقدر احتمال دارد در یک تیم ۶ نفره، هیچ دو نفری در یک ماه متولد نشده باشند؟

$$\frac{1}{12^6} \quad (۴) \quad \frac{P(12,6)}{12^6} \quad (۳) \quad \frac{6!}{12^6} \quad (۲) \quad \frac{\binom{12}{6}}{12^6} \quad (۱)$$

شما پاسخ نداده اید

۳۵- در بازه $(-\infty, a)$ ، نمودار تابع با ضابطه $f(x) = \frac{x+3}{x-1}$ بالاتر از نیمساز ناحیه اول و سوم قرار می‌گیرد، بیش‌ترین مقدار a کدام

است؟

$$-3 \quad (۴) \quad -1 \quad (۳) \quad 3 \quad (۲) \quad 1 \quad (۱)$$

شما پاسخ نداده اید

۳۶- اگر $\tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \frac{2}{3}$ باشد، آن‌گاه $\tan\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)$ کدام است؟

$$\frac{1}{3} \quad (۴) \quad \frac{1}{5} \quad (۳) \quad \frac{-1}{5} \quad (۲) \quad \frac{-1}{3} \quad (۱)$$

شما پاسخ نداده اید

۳۷- دامنه تابع $y = \sqrt{1 + \log_{e/1} x}$ کدام بازه است؟

$$(0, 10] \quad (۴) \quad [0, 10] \quad (۳) \quad (1, 10) \quad (۲) \quad [1, 10] \quad (۱)$$

شما پاسخ نداده اید

۳۸- نمودارهای تابع خطی f و تابع درجه دوم g ، محور y ها را به ترتیب با عرض‌های ۲ و ۳ قطع می‌کنند. اگر

$(fog)(x) = 2x^2 + x - 1$ ، آن‌گاه $(f - g)(x)$ کدام است؟

$$2x^2 - 1 \quad (۴) \quad x^2 + x - 1 \quad (۳) \quad x^2 - 2 \quad (۲) \quad -2x^2 - 2x + 1 \quad (۱)$$

شما پاسخ نداده اید

۳۹- اگر $f(x) = \begin{cases} ax - 1 & x < 1 \\ x^2 + 2a & x \geq 1 \end{cases}$ و $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) - \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -1$ ، مقدار a کدام است؟

$$-1 \quad (۴) \quad -2 \quad (۳) \quad -3 \quad (۲) \quad -4 \quad (۱)$$

شما پاسخ نداده اید

۴۰- حاصل $\lim_{x \rightarrow \frac{3\pi}{4}} \frac{1 + \cot x}{1 + \tan x}$ کدام است؟

$$+\infty \quad (۴) \quad 1 \quad (۳) \quad \text{صفر} \quad (۲) \quad -1 \quad (۱)$$

شما پاسخ نداده اید

۴۱- نمودار تابع با ضابطه $f(x) = \frac{ax + 1 + \sqrt{4x^2 + 9}}{3x - 2}$ از نقطه $(2, 1)$ می‌گذرد، $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ کدام است؟

$$1 \quad (۴) \quad \frac{2}{3} \quad (۳) \quad \frac{1}{3} \quad (۲) \quad -\frac{1}{3} \quad (۱)$$

شما پاسخ نداده اید

۴۲- تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 1}{x + 1} & ; |x| > 1 \\ 2x & ; |x| \leq 1 \end{cases}$ ، از نظر پیوستگی در دو نقطه به طول‌های ۱ و -۱ چگونه است؟

$$\begin{aligned} (۱) \text{ در } -1 \text{ ناپیوسته، در } 1 \text{ پیوسته} \\ (۲) \text{ در } -1 \text{ ناپیوسته، در } 1 \text{ پیوسته} \\ (۳) \text{ در } -1 \text{ پیوسته، در } 1 \text{ پیوسته} \\ (۴) \text{ در } -1 \text{ پیوسته، در } 1 \text{ ناپیوسته} \end{aligned}$$

شما پاسخ نداده اید

۴۳- در تابع با ضابطه $f(x) = \frac{x-1}{\sqrt{x}}$ ، آهنگ متوسط تغییر تابع نسبت به تغییر متغیر x ، در نقطه $x=1$ با نمو ۰/۴۴، از آهنگ

لحظه‌ای تابع در این نقطه، چقدر کمتر است؟

- (۱) $\frac{1}{30}$ (۲) $\frac{1}{24}$ (۳) $\frac{1}{12}$ (۴) $\frac{1}{6}$

شما پاسخ نداده اید

۴۴- مقدار مشتق $\sin x \cos^3 x$ در نقطه $x = \frac{\pi}{4}$ کدام است؟

- (۱) -2 (۲) -1 (۳) 1 (۴) 2

شما پاسخ نداده اید

۴۵- اگر $f(x) = \frac{x^3 - 2}{1 + x^3}$ و $g(x) = \sqrt[3]{x-1}$ ، حاصل $f'(g(x)) \cdot g'(x)$ ، کدام است؟

- (۱) $\frac{3}{x}$ (۲) $\frac{3}{x^2}$ (۳) $\frac{1}{3x}$ (۴) $\frac{x-3}{x^2}$

شما پاسخ نداده اید

ریاضی ، ریاضی ۳ و آمار و مدل‌سازی ، - ۱۳۹۶۰۴۲۳

-۲۶

(سراسری انسانی خارج از کشور - ۹۳)

$$a = 8 + E \text{ و } E < 0 / 25$$

$$S = a^2 = (8 + E)^2 = 64 + 16E + E^2$$

از E^2 صرف نظر می‌کنیم. $\Rightarrow 16E < 16 \times 0 / 25 = 4 = \text{خطای مساحت}$
(اندازه‌گیری و مدل‌سازی) (آمار و مدل‌سازی، صفحه‌های ۹ تا ۱۲)

۴

۳

۲

۱

-۲۷

(سؤال ۶۷۴ کتاب آبی)

متغیرهای تصادفی به چهار دسته زیر تقسیم می‌شوند:

کمی پیوسته	کمی گسسته	کیفی ترتیبی	کیفی اسمی
------------	-----------	-------------	-----------

چون این متغیر قابل اندازه‌گیری نیست، پس متغیری کیفی است. از طرفی هیچ ترتیب طبیعی‌ای در این متغیر وجود ندارد پس این متغیر کیفی، یک متغیر اسمی است. (متغیرهای تصادفی) (آمار و مدل‌سازی، صفحه‌های ۳۴ تا ۳۸)

۴

۳

۲

۱

-۲۸

(سراسری ریاضی خارج از کشور - ۸۵)

از آنجایی که $f_n = F_n - F_{n-1}$ که در آن فراوانی مطلق دسته n ام و

F_n فراوانی تجمعی دسته n ام است، پس:

$$f_4 = F_4 - F_3$$

$F_4 = 48$ است. باید F_3 ، فراوانی تجمعی دسته سوم یعنی x را بیابیم،

$$f_3 = F_3 - F_2 \Rightarrow f_3 = x - 17$$

خواهیم داشت:

$$\alpha_i = \frac{f_i}{N} \times 360^\circ \Rightarrow \alpha_3 = \frac{f_3}{N} \times 360^\circ$$

$$\alpha_3 = 90^\circ = \frac{x-17}{60} \times 360^\circ \Rightarrow \frac{x-17}{60} = \frac{1}{4}$$

پس:

$$\Rightarrow 4x - 68 = 60 \Rightarrow x = \frac{128}{4} = 32$$

بنابراین $x = F_3 = 32$ ، لذا: $f_4 = F_4 - F_3 = 48 - 32 = 16$

(دسته‌بندی داده‌ها و جدول فراوانی) (آمار و مدل‌سازی، صفحه‌های ۵۳ تا ۵۷)

۴

۳

۲

۱

(سؤال ۷۴۲ کتاب آبی)

با توجه به نمودار، مد برابر ۳۱ است. برای پیدا کردن میانگین، به ترتیب زیر عمل می‌کنیم:

$$\begin{aligned} \text{میانگین} &= \frac{(3 \times 10) + (5 \times 30) + (4 \times 40) + (0 + 0 + 1 + 1 + 1 + 1 + 2 + 5 + 1 + 2 + 2 + 4)}{12} \\ &= \frac{360}{12} = 30 \end{aligned}$$

چون تعداد داده‌ها برابر دوازده است، پس میانه برابر با نصف مجموع داده‌های ششم و هفتم (در میان داده‌های از کوچک به بزرگ مرتب شده) است:

$$\text{میانه} = \frac{\text{داده هفتم} + \text{داده ششم}}{2} = \frac{31 + 32}{2} = 31.5$$

میانه < مد < میانگین \Rightarrow

(شافص‌های مرکزی) (آمار و مدل‌سازی، صفحه‌های ۹۶ تا ۹۹ و ۱۱۴ تا ۱۲۶)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

$$\bar{y} = \frac{\sum f_i y_i}{\sum f_i} = \frac{1(-3) + 3(-2) + 1(-1) + 3(0) + 6(1) + 2(2)}{1 + 3 + 1 + 3 + 6 + 2}$$

$$\bar{y} = \frac{-3 - 6 - 1 + 0 + 6 + 4}{16} = \frac{0}{16} = 0$$

$$\Rightarrow \bar{y} = \bar{x} - 12 = 0 \Rightarrow \bar{x} = 12$$

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{\sum f_i (x_i - \bar{x})^2}{\sum f_i}} = \sqrt{\frac{\sum f_i (x_i - 12)^2}{16}}$$

$$\Rightarrow \sigma_x = \sqrt{\frac{1(-3)^2 + 3(-2)^2 + 1(-1)^2 + 6(1)^2 + 2(2)^2}{16}}$$

$$\Rightarrow \sigma_x = \sqrt{\frac{9 + 12 + 1 + 6 + 8}{16}} = \sqrt{\frac{36}{16}} = \frac{3}{2}$$

$$CV = \frac{\sigma_x}{\bar{x}} = \frac{\frac{3}{2}}{12} = \frac{1}{8}$$

(شافص‌های پراکندگی) (آمار و مدل‌سازی، صفحه‌های ۱۳۰ تا ۱۳۵، ۱۴۸ تا ۱۵۳ و ۱۵۷)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

اگر هیچ شرطی اعمال نشود، برای خارج کردن مهره اول، پنج حالت، مهره دوم، چهار حالت، مهره سوم، سه حالت، مهره چهارم، دو حالت و برای خارج کردن مهره پنجم یک حالت وجود دارد، پس با توجه به اصل ضرب، فضای نمونه‌ای در این سؤال $n(S) = 5!$ عضو دارد.

برای آن که دو مهره با شماره فرد به‌طور متوالی خارج نشوند، باید مهره‌ها به‌صورت یک در میان فرد و زوج خارج شوند. توجه کنید که مهره اول نمی‌تواند زوج باشد، زیرا در این‌صورت قطعاً دو مهره آخر فرد خواهند بود، بنابراین مهره اول باید فرد باشد و برای آن سه حالت وجود دارد، مهره دوم باید زوج باشد و برای آن دو حالت وجود دارد، مهره سوم باید فرد باشد و برای آن دو حالت (یکی از فردها در انتخاب اول خارج شده است) و در نتیجه برای مهره‌های چهارم و پنجم فقط یک حالت مطلوب امکان‌پذیر است؛ پس اگر پیشامد مطلوب را A بنامیم، طبق اصل ضرب

$$n(A) = 3 \times 2 \times 2 \times 1 \times 1$$

$$\Rightarrow P(A) = \frac{3 \times 2 \times 2 \times 1 \times 1}{5!} = \frac{12}{120} = \frac{1}{10} = 0.1$$

(پذیره‌های تصادفی و احتمال) (ریاضی ۳، صفحه‌های ۶ و ۷)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

متمم پیشامد «لااقل یکی از موش‌های انتخاب شده سفید باشد»، آن است که «هیچ کدام از موش‌های انتخاب شده سفید نباشند». یا به عبارت دیگر «همه موش‌های انتخاب شده سیاه باشند». بنابراین احتمال مورد نظر، برابر است با:

$$1 - \frac{\binom{6}{3}}{\binom{11}{3}} = 1 - \frac{\frac{6 \times 5 \times 4}{3 \times 2 \times 1}}{\frac{11 \times 10 \times 9}{3 \times 2 \times 1}} = 1 - \frac{20}{165} = \frac{145}{165} = \frac{29}{33}$$

(پذیره‌های تصادفی و احتمال) (ریاضی ۳، صفحه‌های ۶ و ۷)

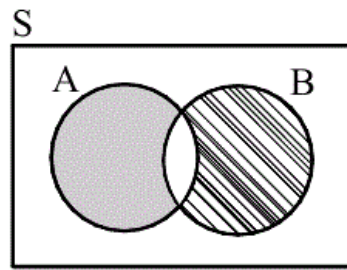
 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

(سؤال ۱۷۰ کتاب آبی)



می‌دانیم که پیشامد $A \cup B$ یعنی « A رخ دهد یا B رخ دهد یا هر دوی آنها رخ دهند.» حال اگر بخواهیم «فقط A رخ دهد یا فقط B رخ دهد»، باید قسمتی که «هم A و هم B رخ می‌دهند» (یعنی $A \cap B$) را از $A \cup B$ حذف کنیم.

که در این صورت اجتماع دو قسمت سایه‌خورده و هاشورخورده در شکل بالا به دست می‌آید. قسمت سایه‌خورده مجموعه $A - B$ و قسمت هاشورخورده مجموعه $B - A$ است و اجتماع آنها یعنی $(A - B) \cup (B - A)$ پیشامد مورد نظر سؤال است.

(پدیده‌های تصادفی و احتمال) (ریاضی ۳، صفحه‌های ۲ تا ۴)

 ۴ ۳ ۲ ۱

(سؤال ۹۲۱ کتاب آبی)

یکی از اعضای تیم را در نظر می‌گیریم. برای این فرد هر ۱۲ ماه از سال مطلوب است، اما نفر بعدی باید در ماهی غیر از ماه نفر اول باشد. پس برای فرد دوم ۱۱ ماه از سال مطلوب است. برای فرد سوم، ۱۰ ماه از سال مطلوب است (ماه‌هایی به غیر از ماه‌های تولد نفرات اول و دوم) و ... به همین ترتیب برای نفر ششم ۷ ماه از سال مطلوب است (ماه‌هایی به جز ماه‌های تولد نفرات اول تا پنجم).

از آنجایی که ماه تولد افراد مستقل از هم است، احتمال پیشامد مورد نظر،

$$\frac{12}{12} \times \frac{11}{12} \times \dots \times \frac{7}{12} = \frac{12 \times 11 \times \dots \times 7}{12^6}$$

برابر است با:

طبق تعریف $P(n, k)$ ، می‌دانیم:

$$P(12, 6) = \frac{12!}{(12-6)!} = 12 \times 11 \times \dots \times 7$$

پس احتمال مورد نظر، برابر با $\frac{P(12, 6)}{12^6}$ است.

(ترکیبیات) (ریاضی ۲، صفحه‌های ۱۸۴ و ۱۸۵)

(پدیده‌های تصادفی و احتمال) (ریاضی ۳، صفحه ۱۳)

 ۴ ۳ ۲ ۱

(سؤال ۹۳ کتاب آبی)

برای آن که نمودار تابع به معادله $f(x) = \frac{x+3}{x-1}$ بالاتر از نیمساز ناحیه اول

و سوم که معادله $y = x$ به صورت قرار بگیرد، باید:

$$\frac{x+3}{x-1} > x \Rightarrow \frac{x+3}{x-1} - x > 0 \Rightarrow \frac{x+3-x(x-1)}{x-1} > 0$$

$$\Rightarrow \frac{-x^2+2x+3}{x-1} > 0 \Rightarrow \frac{x^2-2x-3}{x-1} < 0$$

$$\Rightarrow P = \frac{(x+1)(x-3)}{x-1} < 0$$

$$\Rightarrow \begin{array}{c|cccc} x & & -1 & 1 & 3 & \\ \hline P & - & \circ & + & - & \circ & + \end{array}$$

تعریف نشده

با توجه به این که در بازه $(-\infty, a)$ نمودار تابع f بالاتر از نیمساز ناحیه اول و سوم قرار می‌گیرد، بیش‌ترین مقدار a برابر است با (-1) .

(تابع) (ریاضی ۳، صفحه‌های ۲۸ تا ۳۱)

□۴

□۳✓

□۲

□۱

(سراسری ریاضی فارج از کشور - ۱۸۸)

راه اول:

می‌دانیم $\tan\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) = \frac{1 - \tan \alpha}{1 + \tan \alpha}$ ، بنابراین باید $\tan \alpha$ را بیابیم:

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cot \alpha = \frac{1}{\tan \alpha} = \frac{2}{3} \Rightarrow \tan \alpha = \frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow \tan\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) = \frac{1 - \frac{3}{2}}{1 + \frac{3}{2}} = \frac{-\frac{1}{2}}{\frac{5}{2}} = -\frac{1}{5}$$

راه دوم:

$$\frac{\pi}{4} - \alpha = \left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) - \frac{\pi}{4} \Rightarrow \tan\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) = \tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$= \frac{\tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) - \tan \frac{\pi}{4}}{1 + \tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \tan \frac{\pi}{4}} = \frac{\frac{2}{3} - 1}{1 + \frac{2}{3}} = -\frac{1}{5}$$

(مثال‌ات) (ریاضی ۲، صفحه‌های ۱۳۴ تا ۱۳۶)

(تابع) (ریاضی ۳، صفحه‌های ۳۴ و ۳۵)

□۴

□۳

□۲✓

□۱

باید داشته باشیم:

$$\begin{cases} 1 + \log_{\frac{x}{1}} \geq 0 \rightarrow \log_{\frac{x}{1}} \geq -1 \rightarrow x \leq (0/1)^{-1} \rightarrow x \leq 1 \\ x > 0 \end{cases}$$

پس $0 < x \leq 1$ لذا $D_y = (0, 1]$

(تابع) (ریاضی ۳، صفحه‌های ۵۱ تا ۵۴)

۴ ✓

۳

۲

۱

(سؤال ۳۲۲ کتاب آبی)

f یک تابع خطی است که محور y ها را با عرض ۲ قطع می‌کند، پس $f(x) = mx + 2$. g یک تابع درجه دوم است که محور y ها را با عرض ۳ قطع می‌کند، پس $g(x) = ax^2 + bx + 3$.

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = m(ax^2 + bx + 3) + 2$$

$$\Rightarrow (f \circ g)(x) = max^2 + mbx + (3m + 2)$$

اما طبق فرض سؤال $(f \circ g)(x) = 2x^2 + x - 1$ ، پس، داریم:

$$\begin{cases} (f \circ g)(x) = max^2 + mbx + (3m + 2) \\ (f \circ g)(x) = 2x^2 + x - 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3m + 2 = -1 \Rightarrow m = -1 \quad (*) \\ mb = 1 \xrightarrow{(*)} -b = 1 \Rightarrow b = -1 \\ ma = 2 \xrightarrow{(*)} -a = 2 \Rightarrow a = -2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} f(x) = -x + 2 \\ g(x) = -2x^2 - x + 3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (f - g)(x) = f(x) - g(x) = (-x + 2) - (-2x^2 - x + 3)$$

$$= 2x^2 - 1$$

(تابع) (ریاضی ۳، صفحه‌های ۵۵ تا ۶۵)

۴ ✓

۳

۲

۱

(سراسری ریاضی - ۸۶)

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x^2 + 2a) = 1 + 2a$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (ax - 1) = a - 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) - \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -1$$

$$(1 + 2a) - (a - 1) = -1 \Rightarrow a = -3$$

(عد و پیوستگی) (ریاضی ۳، صفحه‌های ۷۵ تا ۷۷)

۴

۳

۲ ✓

۱

(سراسری تجربی - ۸۲)

$$\lim_{x \rightarrow \frac{3\pi}{4}} \frac{1 + \frac{1}{\tan x}}{1 + \tan x} = \lim_{x \rightarrow \frac{3\pi}{4}} \frac{1 + \tan x}{\tan x} = \lim_{x \rightarrow \frac{3\pi}{4}} \frac{1}{\tan x} = -1$$

(عد و پیوستگی) (ریاضی ۳، صفحه‌های ۸۲ تا ۸۶)

۴

۳

۲

۱ ✓

(سراسری تجربی - ۹۱)

با توجه به صورت سوال، نمودار تابع f از نقطه $(2, 1)$ می‌گذرد، به عبارت دیگر $f(2) = 1$ داریم:

$$f(x) = \frac{ax + 1 + \sqrt{4x^2 + 9}}{3x - 2} \xrightarrow{f(2)=1} \frac{2a + 1 + \sqrt{16 + 9}}{6 - 2} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{2a + 6}{4} = 1 \Rightarrow 2a + 6 = 4 \Rightarrow 2a = -2 \Rightarrow a = -1$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{-x + 1 + \sqrt{4x^2 + 9}}{3x - 2}$$

حال حاصل $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ را محاسبه می‌کنیم:

$$L = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x + 1 + \sqrt{4x^2 + 9}}{3x - 2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x + 1 + 2|x|}{3x - 2}$$

اگر $x \rightarrow +\infty$ ، آن‌گاه $x > 0$ و در نتیجه $|x| = x$ ، داریم:

$$L = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x + 1 + 2x}{3x - 2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + 1}{3x - 2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{3x} = \frac{1}{3}$$

(عد و پیوستگی) (ریاضی ۳، صفحه‌های ۱۱۱ تا ۱۱۴)

۴

۳

۲ ✓

۱

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x - 1) = 0$$

بنابراین تابع در $x = 1$ ناپیوسته است.

در $x = -1$:

$$\lim_{x \rightarrow (-1)^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow (-1)^-} (x - 1) = -2$$

$$\lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow (-1)^+} 2x = -2 \quad \text{و} \quad f(-1) = -2$$

پس تابع در $x = -1$ پیوسته است.

(عد و پیوستگی) (ریاضی ۳، صفحه‌های ۱۱۵ تا ۱۲۰)

۴

۳

۲

۱

-۴۳

(سراسری تهری فارج از کشور - ۹۴)

آهنگ متوسط تغییر تابع در نقطه $x = 1$ با نمو $0/44$ یعنی آهنگ متوسط تغییر تابع در فاصله $[1, 1/44]$. بنابراین:

$$\text{آهنگ متوسط تغییر} = \frac{f(1/44) - f(1)}{1/44 - 1} = \frac{\frac{1/44 - 1}{\sqrt{1/44}} - 1}{0/44}$$

$$= \frac{0/44}{0/44} = \frac{1/2}{1/2} = \frac{1}{1/2} = \frac{10}{12} = \frac{5}{6}$$

حال آهنگ لحظه‌ای (مشتق) تابع را در $x = 1$ محاسبه می‌کنیم. چون در تابع f ، $x - 1$ عامل صفر شونده است، پس برای محاسبه مشتق تنها از عامل صفر شونده مشتق می‌گیریم:

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \Rightarrow f'(1) = 1$$

$$\Rightarrow \text{آهنگ متوسط} - \text{آهنگ لحظه‌ای} = 1 - \frac{5}{6} = \frac{1}{6}$$

(مشتق) (ریاضی ۳، صفحه‌های ۱۲۲ تا ۱۳۰ و ۱۴۲)

۴

۳

۲

۱

با استفاده از فرمول مشتق uv داریم:

$$y = \sin x \cos^3 x$$

$$y' = \cos x \cdot \cos^3 x - 3 \sin^2 x \cdot \sin x$$

$$y' \left(\frac{\pi}{4} \right) = \cos \frac{\pi}{4} \cos^3 \frac{\pi}{4} - 3 \sin^2 \frac{\pi}{4} \sin \frac{\pi}{4}$$

$$= \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right) \left(\frac{-\sqrt{2}}{2} \right)^3 - 3 \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2 \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \frac{-1}{2} - \frac{3}{2} = -2$$

(مشتق) (ریاضی ۳، صفحه‌های ۱۳۶ تا ۱۴۲)

۴

۳

۲

۱ ✓

(سراسری ریاضی - ۹۲)

$$f'(g(x)) \cdot g'(x) = (f(g(x)))'$$

پس برای محاسبه راحت‌تر مشتق، ابتدا تابع $f \circ g$ را می‌یابیم و سپس از آن مشتق می‌گیریم:

$$\Rightarrow f(g(x)) = \frac{(\sqrt[3]{x-1})^3 - 2}{1 + (\sqrt[3]{x-1})^3} = \frac{x-1-2}{x} = \frac{x-3}{x} = 1 - \frac{3}{x}$$

$$\Rightarrow (f(g(x)))' = \frac{3}{x^2}$$

(مشتق) (ریاضی ۳، صفحه‌های ۱۳۶ تا ۱۴۲)

۴

۳

۲ ✓

۱