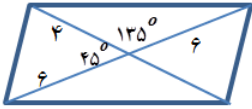


| | |
|---|---|
| ۱ | <p>۱۲۶- جملات دوم و پنجم و دوازدهم از یک دنباله‌ی حسابی، می‌توانند سه جمله متوالی از دنباله‌ی هندسی باشند، قدر نسبت دنباله‌ی هندسی کدام است؟</p> <p>(۱) $\frac{5}{3}$ (۲) $\frac{7}{4}$ (۳) $\frac{9}{4}$ (۴) $\frac{7}{3}$</p> |
| | <p>$t_1 = a + d$, $t_2 = a + 2d$, $t_3 = a + 3d \Rightarrow t_3^2 = t_1 \times t_5 \Rightarrow a^2 + 9ad + 9d^2 = a^2 + 12ad + 5d^2 \Rightarrow a = \frac{5}{4}d$ $\Rightarrow t_1 = \frac{9}{4}d$, $t_2 = \frac{11}{4}d$, $t_3 = \frac{13}{4}d \Rightarrow q = \frac{5}{4}$</p> |
| ۲ | <p>۱۲۷- اگر $f(x) = \sqrt{2x - x^2}$، دامنه‌ی تابع $f(3-x)$، کدام است؟</p> <p>(۱) $[0, 2]$ (۲) $[0, 3]$ (۳) $[1, 2]$ (۴) $[1, 3]$</p> |
| | <p>$3 - x = t \Rightarrow x = 3 - t \Rightarrow f(t) = \sqrt{2(3-t) - (3-t)^2} = \sqrt{(3-t)(-1+t)} \Rightarrow (3-t)(-1+t) \geq 0 \Rightarrow D = [1, 3]$</p> |
| ۳ | <p>۱۲۸- در متوازی‌الاضلاعی اندازه‌ی دو قطر ۱۲ و ۸ واحد، و زاویه بین دو قطر ۱۳۵ درجه است. مساحت متوازی‌الاضلاع چند برابر $\sqrt{2}$ است؟</p> <p>(۱) ۱۸ (۲) ۲۴ (۳) ۳۲ (۴) ۳۶</p> |
| | <p style="text-align: right;"></p> <p>$S_1 = \frac{1}{2} \times 8 \times 12 \times \sin 135^\circ = 6\sqrt{2}$, $S_2 = \frac{1}{2} \times 8 \times 12 \times \sin 45^\circ = 6\sqrt{2} \Rightarrow S = 2 \times 12\sqrt{2} = 24\sqrt{2}$</p> <p>راه حل دیگر: مساحت چهار ضلعی با اندازه قطرهای d_1, d_2 که زاویه بین قطرهای برابر θ است برابر با: $\frac{1}{2} \times d_1 \times d_2 \times \sin \theta$</p> <p>$\Rightarrow S = \frac{1}{2} \times d_1 \times d_2 \times \sin 135^\circ = \frac{1}{2} \times 8 \times 12 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 24\sqrt{2}$</p> |
| ۴ | <p>۱۲۹- از هر یک از مدارس A و B و C و D و E چهار نفر به اردوگاه دانش‌آموزی دعوت شده‌اند. به چند طریق می‌توان سه دانش‌آموز که دو به دو غیر هم مدرسه باشند، انتخاب کرد؟</p> <p>(۱) ۱۶۰ (۲) ۳۲۰ (۳) ۴۸۰ (۴) ۶۴۰</p> |
| | <p>$\binom{5}{3} \times 4 \times 4 \times 4 = 10 \times 64 = 640$</p> |

۵

۱۳۰- در جدول فراوانی تجمعی زیر میانگین داده‌ها، کدام است؟

| | | | | | | | |
|---------------|---|----|----|----|----|---------|---------|
| مرکز دسته | ۷ | ۸ | ۹ | ۱۰ | ۱۱ | ۹,۳ (۲) | ۹,۲ (۱) |
| فراوانی تجمعی | ۸ | ۲۴ | ۴۴ | ۶۸ | ۸۰ | ۹,۵ (۴) | ۹,۴ (۳) |

| | | | | | |
|-----------|---|----|----|----|----|
| مرکز دسته | ۷ | ۸ | ۹ | ۱۰ | ۱۱ |
| فراوانی | ۸ | ۱۶ | ۲۰ | ۲۴ | ۱۲ |

$$\Rightarrow \bar{x} = \frac{۵۶ + ۱۲۸ + ۱۸۰ + ۲۴۰ + ۱۳۲}{۸۰} = ۹,۲$$

۶

۱۳۱- در ۱۵۰ داده‌ی آماری با میانگین ۱۲، به دو برابر هر یک از داده‌ها ۳ واحد اضافه می‌کنیم. تا داده‌های جدیدی حاصل شود. ضریب تغییرات داده‌های جدید چند برابر ضریب تغییرات داده‌های قبلی است؟

- $\frac{۷}{۹}$ (۱) $\frac{۵}{۶}$ (۲) $\frac{۷}{۸}$ (۳) $\frac{۸}{۹}$ (۴)

$$\bar{x}' = 2\bar{x} + 3, \sigma' = 2\sigma \Rightarrow \frac{\sigma'}{\bar{x}'} = \frac{2\sigma}{2\bar{x} + 3} = \frac{2\sigma}{2\bar{x} + 3} = \frac{2\sigma}{2\bar{x} + 3} = \frac{24}{27} = \frac{8}{9}$$

۷

۱۳۲- دو تاس را با هم پرتاب می‌کنیم. با کدام احتمال مجموع دو عدد رو شده، مضرب ۴ است؟

- $\frac{۲}{۹}$ (۱) $\frac{۵}{۱۸}$ (۲) $\frac{۱}{۴}$ (۳) $\frac{۵}{۱۲}$ (۴)

$$۴, ۸, ۱۲ \Rightarrow A = \{(1, 3), (3, 1), (2, 2), (2, 6), (6, 2), (3, 5), (5, 3), (4, 4), (6, 6)\} \Rightarrow P(A) = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$$

۸

۱۳۳- در کیسه‌ای ۵ مهره با شماره‌های ۱ تا ۵ وجود دارد. این مهره‌ها را به طور تصادفی پی‌درپی بدون جای‌گذاری خارج می‌کنیم. با کدام احتمال دو مهره با شماره فرد متوالیاً خارج نمی‌شوند؟

- $\frac{۱}{۱۰}$ (۱) $\frac{۲}{۱۵}$ (۲) $\frac{۲}{۳}$ (۳) $\frac{۲۵}{۱۰۰}$ (۴)

$$\Rightarrow \frac{3}{5} \times \frac{2}{4} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{10}$$

۹

۱۳۴- مجموعه جواب نامعادله $|\frac{x-2}{2x+1}| > 1$ ، به صورت کدام بازه‌ها است؟

- $(-3, -\frac{1}{2}) \cup (-\frac{1}{2}, 1)$ (۱) $(-2, -\frac{1}{2}) \cup (-\frac{1}{2}, 1)$ (۲) $(-3, -\frac{1}{2})$ (۳) $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{3})$ (۴)

$$x \neq -\frac{1}{2} \Rightarrow |x-2| > |2x+1| \Rightarrow x^2 - 4x + 4 > 4x^2 + 4x + 1 \Rightarrow 3x^2 + 8x - 3 < 0 \Rightarrow x \in (-3, \frac{1}{3})$$

$$\Rightarrow D = (-3, -\frac{1}{2}) \cup (-\frac{1}{2}, \frac{1}{3})$$

| | |
|----|--|
| ۱۰ | <p>۱۳۵- اگر $f(x) = (2x - 3)^2$ و $g(x) = x + 2$ نمودارهای دو تابع f و $f \circ g$، با کدام طول متقاطع اند؟</p> <p style="text-align: center;"> $\frac{3}{2}$ (۴) ۱ (۳) $\frac{1}{2}$ (۲) -۱ (۱) </p> |
|----|--|

$$f \circ g(x) = f(x) \Rightarrow (2x + 2 - 3)^2 = (2x - 3)^2 \Rightarrow 4x^2 + 4x + 1 = 4x^2 - 12x + 9 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$$

| | |
|----|--|
| ۱۱ | <p>۱۳۶- اگر $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{ax + 9}{1 - x + \sqrt{x + 1}} = 3$ باشد، آنگاه حد این کسر وقتی $x \rightarrow 3$ کدام است؟</p> <p style="text-align: center;"> Δ (۴) ۴ (۳) ۲ (۲) ۱ (۱) </p> |
|----|--|

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{ax + 9}{1 - x + \sqrt{x + 1}} = -a = 3 \Rightarrow a = -3 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 3} \frac{-3x + 9}{1 - x + \sqrt{x + 1}} &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(-3x + 9)(1 - x - \sqrt{x + 1})}{(1 - x + \sqrt{x + 1})(1 - x - \sqrt{x + 1})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{-3(x - 3)(1 - x - \sqrt{x + 1})}{(1 - x)^2 - (x + 1)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{-3(x - 3)(1 - x - \sqrt{x + 1})}{x(x - 3)} = \frac{12}{3} = 4 \end{aligned}$$

| | |
|----|---|
| ۱۲ | <p>۱۳۷- به ازای کدام مقدار a تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} 3x - [x] & ; x < 2 \\ a & ; x = 2 \\ x + 2 & ; x > 2 \end{cases}$ در نقطه $x = 2$ پیوسته است؟</p> <p style="text-align: center;"> a هیچ مقدار (۴) Δ (۳) $\frac{4}{5}$ (۲) ۴ (۱) </p> |
|----|---|

تابع به ازای هیچ مقداری از a در $x = 2$ پیوسته نیست. $\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 2 + 2 = 4$ ، $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 6 - 1 = 5$

| | |
|----|--|
| ۱۳ | <p>۱۳۸- در جعبه‌ای ۶ مهره سفید و ۹ مهره سیاه موجود است. دو مهره متوالیاً و بدون جای‌گذاری از آن بیرون می‌آوریم. با کدام احتمال بدون توجه به اولین مهره، دومین مهره خارج شده سفید است؟</p> <p style="text-align: center;"> $\frac{3}{5}$ (۴) $\frac{2}{5}$ (۳) $\frac{3}{7}$ (۲) $\frac{5}{14}$ (۱) </p> |
|----|--|

$$\left(\text{اول سفید و دوم سفید} \right) \text{ یا } \left(\text{اول سیاه و دوم سفید} \right) \Leftrightarrow \frac{6}{15} \times \frac{6}{14} + \frac{9}{15} \times \frac{6}{14} = \frac{84}{15 \times 14} = \frac{2}{5}$$

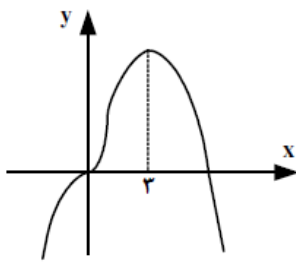
| | |
|----|--|
| ۱۴ | <p>۱۳۹- دانش‌آموزی به ۵ پرسش ۵ گزینه‌ای به تصادف پاسخ می‌دهد. با کدام احتمال فقط به ۳ پرسش پاسخ صحیح داده است؟</p> <p style="text-align: center;"> $0,0768$ (۴) $0,0625$ (۳) $0,0512$ (۲) $0,0256$ (۱) </p> |
|----|--|

$$p = \frac{1}{5} \quad , n = 5 \quad , k = 3 \Rightarrow p = \binom{5}{3} \left(\frac{1}{5}\right)^3 \left(\frac{4}{5}\right)^2 = 10 \times \frac{16}{5^5} = 0,0512$$

| | |
|--|----|
| <p>۱۴۰- ضابطه‌ی معکوس تابع $y = 2 - \sqrt{x-1}$، به کدام صورت است؟</p> <p>(۱) $y = x^2 - 4x + 5; x \leq 2$</p> <p>(۲) $y = -x^2 + 4x - 5; x \leq 2$</p> <p>(۳) $y = x^2 - 4x + 5; x \geq 1$</p> <p>(۴) $y = -x^2 + 4x - 5; x \geq 1$</p> | ۱۵ |
| <p>$D_f = [1, \infty)$, $R_f = (-\infty, 2] \Rightarrow R_{f^{-1}} = [1, \infty)$, $D_{f^{-1}} = (-\infty, 2]$</p> <p>$x = 2 - \sqrt{y-1} \Rightarrow \sqrt{y-1} = 2 - x \Rightarrow y - 1 = x^2 - 4x + 4 \Rightarrow y = x^2 - 4x + 3$</p> | |
| <p>۱۴۱- در شروع یک نوع کشت ۱۴۰۰ باکتری موجود است. تعدادی باکتری‌ها پس از t دقیقه به صورت $f(t) = Ae^{0.4t}$ است. پس از چند دقیقه ۷۰۰۰ باکتری موجود است؟ ($\ln 5 = 1.68$)</p> <p>(۱) ۲۱</p> <p>(۲) ۲۸</p> <p>(۳) ۳۵</p> <p>(۴) ۴۲</p> | ۱۶ |
| <p>$f(t) = 1400 \cdot e^{0.4t} \Rightarrow 7000 = 1400 \cdot e^{0.4t} \Rightarrow 0.4t = \ln 5 \Rightarrow t = \frac{1.68}{0.4} = 42$</p> | |
| <p>۱۴۲- جواب کلی معادله‌ی مثلثاتی $\sin^2 x - \cos^2 x = \sin^2 \frac{5\pi}{4}$ به کدام صورت است؟</p> <p>(۱) $2k\pi \pm \frac{\pi}{6}$</p> <p>(۲) $2k\pi \pm \frac{\pi}{3}$</p> <p>(۳) $k\pi \pm \frac{\pi}{6}$</p> <p>(۴) $k\pi \pm \frac{\pi}{3}$</p> | ۱۷ |
| <p>$(\sin^2 x + \cos^2 x)(\sin^2 x - \cos^2 x) = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 \Rightarrow -\cos 2x = \frac{1}{2} \Rightarrow \cos 2x = \cos \frac{2\pi}{3}$</p> <p>$\Rightarrow 2x = 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3} \Rightarrow x = k\pi \pm \frac{\pi}{3}$</p> | |
| <p>۱۴۳- عرض از مبدا، خط مماس بر منحنی به معادله $y = \ln \sqrt{\frac{\sin x}{1 + \cos x}}$ در نقطه‌ی $x = \frac{\pi}{4}$ واقع بر آن، کدام است؟</p> <p>(۱) $-\frac{\pi}{4}$</p> <p>(۲) $-\frac{\pi}{2}$</p> <p>(۳) $\frac{\pi}{4}$</p> <p>(۴) $\frac{\pi}{2}$</p> | ۱۸ |
| <p>$A\left(\frac{\pi}{4}, \ln \sqrt{\frac{1}{2}}\right) = \left(\frac{\pi}{4}, \cdot\right)$ $y = \frac{1}{2}(\ln(\sin x) - \ln(1 + \cos x))$</p> <p>$\Rightarrow y' = \frac{1}{2}\left(\frac{\cos x}{\sin x} - \frac{-\sin x}{1 + \cos x}\right) \Rightarrow m = \frac{1}{2}(\cdot + 1) = \frac{1}{2}y = \frac{1}{2}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \Rightarrow y = -\frac{\pi}{4}$</p> | |
| <p>۱۴۴- بیشترین مقدار تابع $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 5$، در بازه‌ی $[-2, 2]$، کدام است؟</p> <p>(۱) ۹</p> <p>(۲) ۱۰</p> <p>(۳) ۱۲</p> <p>(۴) ۱۷</p> | ۱۹ |

$$y' = 3x^2 - 6x - 9 = 0 \Rightarrow x = -1, \cancel{x=3} \Rightarrow \begin{cases} f(-2) = -8 - 12 + 18 + 5 = 3 \\ f(2) = 8 - 12 - 18 + 5 = -17 \Rightarrow \text{Max}f = 10 \\ f(-1) = -1 - 3 + 9 + 5 = 10 \end{cases}$$

۲۰



۱۴۵- شکل روبه‌رو، نمودار تابع $y = ax^3 + 2x^2 + bx^2$ است. a کدام است؟

- (۱) -1
- (۲) $-\frac{1}{2}$
- (۳) $-\frac{1}{4}$
- (۴) $\frac{1}{4}$

تابع فقط یک ماکزیموم نسبی در $x = 3$ دارد و در مبدا مختصات نقطه عطف دارد.

$$f(x) = ax^3 + 2x^2 + bx^2 \Rightarrow f'(x) = 3ax^2 + 4x \Rightarrow f'(3) = 0 \Rightarrow 108a + 12b = 0$$

$$f''(x) = 6ax + 4 \Rightarrow f''(3) = 0 \Rightarrow 18a + 4 = 0 \Rightarrow a = -\frac{1}{3}$$

۲۱

۱۴۶- تقعر منحنی به معادله $y = x\sqrt{x^2 + 2}$ در بازه‌ی $(a, +\infty)$ روبه بالا است. کمترین مقدار a ، کدام است؟

- (۱) صفر
- (۲) -1
- (۳) 1
- (۴) $-\infty$

$$y' = \sqrt{x^2 + 2} + x \times \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + 2}} = \frac{2x^2 + 2}{\sqrt{x^2 + 2}} \Rightarrow y'' = \frac{4x(\sqrt{x^2 + 2}) - (2x^2 + 2) \times \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + 2}}}{x^2 + 2}$$

$$= \frac{4x(x^2 + 2) - x(2x^2 + 2)}{(x^2 + 2)\sqrt{x^2 + 2}} = \frac{2x(x^2 + 2)}{(x^2 + 2)\sqrt{x^2 + 2}} \Rightarrow y'' > 0 \Rightarrow x \in (0, \infty) \Rightarrow a = 0$$

۲۲

۱۴۷- دو ضلع یک مربع منطبق بر دو خط به معادلات $2x - 2y = 3$ و $y = x + 1$ هستند، مساحت این مربع کدام است؟

- (۱) $\frac{9}{8}$
- (۲) $\frac{9}{4}$
- (۳) $\frac{25}{8}$
- (۴) $\frac{25}{4}$

$$2x - 2y = -2 \quad \boxed{} \quad 2x - 2y = 3 \Rightarrow a = \frac{|-2 - 3|}{\sqrt{4 + 4}} = \frac{5}{\sqrt{8}} \Rightarrow S = \frac{25}{8}$$

۲۳

۱۴۸- سهمی به کانون $F(2, 4)$ و خط هادی به معادله $x = -1$ ، محور x ها را با کدام طول قطع می‌کند؟

- (۱) $\frac{17}{6}$
- (۲) $\frac{19}{6}$
- (۳) $\frac{10}{3}$
- (۴) $\frac{11}{3}$

$$F \begin{cases} h + p = 2 \\ k = 4 \end{cases}, x = h - p = -1 \Rightarrow \begin{cases} h + p = 2 \\ h - p = -1 \end{cases} \Rightarrow h = \frac{1}{2}, p = \frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow (y - 4)^2 = 6(x - \frac{1}{2}) \Rightarrow 16 = 6x - 3 \Rightarrow x = \frac{19}{6}$$

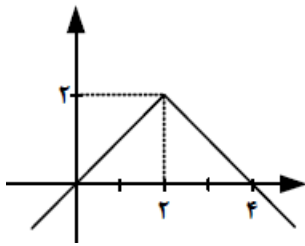
۱۴۹- مختصات دو سر قطر کوچک یک بیضی $(-1, 3)$, $(-1, -1)$ است. این بیضی از نقطه $(-4, 2)$ می‌گذرد، خروج از مرکز آن کدام است؟

(۱) $\frac{\sqrt{2}}{3}$ (۲) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (۳) $\frac{\sqrt{6}}{3}$ (۴) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

$B(-1, 3), B'(-1, -1) \Rightarrow O'(-1, 1), 2b = 4 \Rightarrow b = 2 \quad a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow a^2 = 4 + c^2 \Rightarrow \frac{(x+1)^2}{4+c^2} + \frac{(y-1)^2}{4} = 1$

$(-4, 2) \Rightarrow \frac{(-4+1)^2}{4+c^2} + \frac{(2-1)^2}{4} = 1 \Rightarrow \frac{9}{4+c^2} + \frac{1}{4} = 1 \Rightarrow \frac{9}{4+c^2} = \frac{3}{4} \Rightarrow c = \sqrt{8} \Rightarrow a = \sqrt{12} \Rightarrow e = \frac{\sqrt{8}}{\sqrt{12}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$

۱۵۰- با توجه به شکل روبه‌رو، حاصل $\int_0^4 (2 - |x - 2|) dx$ کدام است؟



- (۱) ۲
(۲) ۳
(۳) ۳٫۵
(۴) ۴

$$S = \frac{4 \times 2}{2} = 4$$

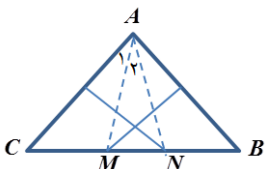
۱۵۱- با شرط $x \neq k\pi + \frac{\pi}{4}$ حاصل $\int \frac{\cos 2x}{\cos x - \sin x} dx$ کدام است؟

(۱) $\sin x + \cos x + c$ (۲) $\sin x - \cos x + c$
(۳) $-\sin x + \cos x + c$ (۴) $-\sin x - \cos x + c$

$$\int \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cos x - \sin x} dx = \int \frac{(\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x)}{\cos x - \sin x} dx = \int (\cos x + \sin x) dx = \sin x - \cos x + c$$

۱۵۲- در مثلث ABC داریم $AB = AC$ و $\hat{A} = 80^\circ$ ، عمود منصف‌های دو ساق مثلث، قاعده‌ی BC را در M و N قطع می‌کند. کوچکترین زاویه‌ی مثلث AMN چند درجه است؟

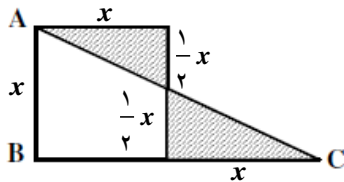
- (۱) ۱۵ (۲) ۲۰ (۳) ۲۵ (۴) ۳۰



$$\hat{C} = 50^\circ, AN = CN \Rightarrow \hat{A}_1 + \hat{A}_r = 50^\circ \Rightarrow \begin{cases} 2\hat{A}_1 + \hat{A}_r = 80^\circ \\ \hat{A}_1 + \hat{A}_r = 50^\circ \end{cases} \Rightarrow \hat{A}_r = 20^\circ$$

۱۵۳- در مثلث قائم‌الزاویه ABC ، بر روی ضلع AB مربعی ساخته شده است. اگر دو مثلث سایه زده همنهشت باشند، مساحت ذوزنقه

چند برابر مساحت مربع است؟



$$\frac{2}{3} \quad (2)$$

$$\frac{4}{5} \quad (4)$$

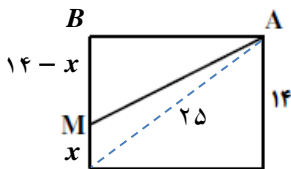
$$\frac{5}{9} \quad (1)$$

$$\frac{3}{4} \quad (3)$$

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{\frac{(\frac{1}{2}x)x}{2}}{x^2} = \frac{2}{4}$$

۱۵۴- در شکل روبه‌رو پاره‌خط AM مساحت مستطیل را به دو جزء با نسبت مساحت‌های $\frac{5}{9}$ تقسیم کرده است. اگر قطر مستطیل ۲۵

واحد، باشد، پاره‌خط AM چند واحد است؟



$$21 \quad (1)$$

$$23 \quad (2)$$

$$9\sqrt{7} \quad (3)$$

$$10\sqrt{6} \quad (4)$$

$$AB = \sqrt{625 - 196} = \sqrt{429}, \quad \frac{S_1}{S_2} = \frac{5}{9} \Rightarrow \frac{(14-x)\sqrt{429}}{2} = \frac{5}{9} \Rightarrow x = 4$$

$$\Rightarrow AM = \sqrt{429 + 100} = \sqrt{529} = 23$$

۱۵۵- در یک مکعب به طول یال $4\sqrt{2}$ ، فاصله وسط هر یک از دو وجه غیرموازی از یکدیگر چقدر است؟

$$3\sqrt{2} \quad (4)$$

$$4 \quad (3)$$

$$2\sqrt{3} \quad (2)$$

$$3 \quad (1)$$

$$AC = BC = 2\sqrt{2} \Rightarrow AB = \sqrt{8+8} = 4$$

