

ریاضیات پایه رشته‌ی علوم تجربی

۱۲۶. جملات دوم و پنجم و دوازدهم از یک دنباله‌ی حسابی، می‌توانند سه جمله‌ی متوالی از یک دنباله‌ی هندسی باشند، قدر نسبت دنباله‌ی هندسی کدام است؟

- (۱) $\frac{5}{3}$ (۲) $\frac{7}{4}$ (۳) $\frac{9}{4}$ (۴) $\frac{7}{3}$

۱۲۷. اگر $f(x) = \sqrt{2x - x^2}$ ، دامنه‌ی تابع $f(2-x)$ کدام است؟

- (۱) $[0, 2]$ (۲) $[0, 3]$ (۳) $[1, 2]$ (۴) $[1, 3]$

۱۲۸. در متوازی‌الاضلاع‌ی اندازه‌ی دو قطر ۱۲ و ۸ واحد، و زاویه‌ی بین دو قطر ۱۳۵ درجه است، مساحت متوازی‌الاضلاع چند برابر $\sqrt{2}$ است؟

- (۱) ۱۸ (۲) ۲۴ (۳) ۳۲ (۴) ۳۶

۱۲۹. از هر یک از مدارس A, B, C, D, E و چهار نفر به اردوگاه دانش آموزی دعوت شده‌اند. به چند طریق می‌توان سه دانش آموز که دویه دو غیر هم مدرسه باشند، انتخاب کرد؟

- (۱) ۱۶۰ (۲) ۳۲۰ (۳) ۴۸۰ (۴) ۶۴۰

۱۳۰. در جدول فراوانی تجمعی زیر میانگین داده‌ها، کدام است؟

مرکز دسته	۷	۸	۹	۱۰	۱۱
فراوانی تجمعی	۸	۲۴	۴۴	۶۸	۸۰

- (۱) $9/2$ (۲) $9/3$ (۳) $9/4$ (۴) $9/5$

۱۳۱. در ۱۵۰ داده‌ی آماری با میانگین ۱۲، به دو برابر هر یک از داده‌ها ۳ واحد اضافه می‌کنیم، تا داده‌های جدیدی حاصل شود. ضریب تغییرات داده‌های جدید چند برابر ضریب تغییرات داده‌های قبلی است؟

- (۱) $\frac{7}{9}$ (۲) $\frac{5}{6}$ (۳) $\frac{7}{8}$ (۴) $\frac{1}{9}$

۱۳۲. دو تاس را با هم پرتاب می‌کنیم. با کدام احتمال مجموع دو عدد رو شده، مضرب ۴ است؟

- (۱) $\frac{2}{9}$ (۲) $\frac{5}{18}$ (۳) $\frac{1}{4}$ (۴) $\frac{5}{14}$

۱۳۳. در کیسه‌ای ۵ مهره با شماره‌های ۱ تا ۵ وجود دارد. این مهره‌ها را به طور تصادفی پی‌درپی بدون جای‌گذاری خارج می‌کنیم. با کدام احتمال دو مهره با شماره‌ی فرد متوالیاً خارج نمی‌شوند؟

- (۱) $0/1$ (۲) $0/15$ (۳) $0/2$ (۴) $0/25$

۱۳۴. مجموعه جواب نامعادله‌ی $1 > \left| \frac{x-2}{3x+1} \right|$ به صورت کدام بازه‌ها است؟

- (۱) $(-3, -\frac{1}{3}) \cup (-\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ (۲) $(-2, -\frac{1}{3}) \cup (-\frac{1}{3}, 1)$ (۳) $(-3, -\frac{1}{3})$ (۴) $(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$

۱۳۵. اگر $f(x) = (2x-3)^2$ و $g(x) = x+2$ ، نمودارهای دو تابع f و $f \circ g$ ، با کدام طول متقاطع‌اند؟

- (۱) -۱ (۲) $\frac{1}{4}$ (۳) ۱ (۴) $\frac{2}{3}$

۱۳۶. اگر $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{ax+9}{1-x+\sqrt{x+1}} = 3$ باشد، آن‌گاه حد این کسر وقتی $x \rightarrow 3$ کدام است؟

- ۱ (۱) ۲ (۲) ۴ (۳) ۵ (۴)

۱۳۷. به ازای کدام مقدار a تابع با ضابطه‌ی $f(x) = \begin{cases} 3x - [x] & x < 2 \\ a & x = 2 \\ x + 2 & x > 2 \end{cases}$ در نقطه‌ی $x = 2$ پیوسته است؟

- ۴ (۱) ۴/۵ (۲) ۵ (۳) هیچ مقدار a (۴)

۱۳۸. در جعبه‌ای ۶ مهره‌ی سفید و ۹ مهره‌ی سیاه موجود است. دو مهره متوالیاً و بدون جای‌گذاری از آن بیرون می‌آوریم. با کدام احتمال بدون توجه به اولین مهره، دومین مهره‌ی خارج شده سفید است؟

- ۱ (۱) ۲/۷ (۲) ۳/۵ (۳) ۳/۵ (۴)

۱۳۹. دانش‌آموزی به ۵ پرسش ۵ گزینه‌ای به تصادف پاسخ می‌دهد. با کدام احتمال فقط به ۳ پرسش پاسخ صحیح داده است؟

- ۰/۰۲۵۶ (۱) ۰/۰۵۱۲ (۲) ۰/۰۶۲۵ (۳) ۰/۰۷۶۸ (۴)

۱۴۰. ضابطه‌ی معکوس تابع $y = 2 - \sqrt{x-1}$ ، به کدام صورت است؟

- ۱ (۱) $y = x^2 - 4x + 5$; $x \leq 2$
 ۲ (۲) $y = -x^2 + 4x - 5$; $x \leq 2$
 ۳ (۳) $y = x^2 - 4x + 5$; $x \geq 1$
 ۴ (۴) $y = -x^2 + 4x - 5$; $x \geq 1$

۱۴۱. در شروع یک نوع کشت ۱۴۰۰ باکتری موجود است. تعداد باکتری‌ها پس از t دقیقه به صورت $f(t) = Ae^{0.04t}$ است، پس از چند دقیقه ۷۰۰۰ باکتری موجود است؟ ($\ln 5 = 1/68$)

- ۲۱ (۱) ۲۸ (۲) ۳۵ (۳) ۴۲ (۴)

۱۴۲. جواب کلی معادله‌ی مثلثاتی $\sin^2 x - \cos^2 x = \sin^2 \frac{5\pi}{4}$ ، به کدام صورت است؟

- ۱ (۱) $2k\pi \pm \frac{\pi}{6}$
 ۲ (۲) $2k\pi \pm \frac{\pi}{4}$
 ۳ (۳) $k\pi \pm \frac{\pi}{6}$
 ۴ (۴) $k\pi \pm \frac{\pi}{4}$

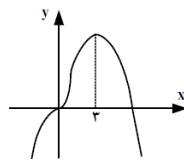
۱۴۳. عرض از مبدأ خط مماس بر منحنی به معادله‌ی $y = \ln \sqrt{\frac{\sin x}{1 + \cos x}}$ در نقطه‌ی $x = \frac{\pi}{4}$ واقع بر آن، کدام است؟

- ۱ (۱) $-\frac{\pi}{4}$
 ۲ (۲) $-\frac{\pi}{2}$
 ۳ (۳) $\frac{\pi}{4}$
 ۴ (۴) $\frac{\pi}{2}$

۱۴۴. بیش‌ترین مقدار تابع $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 5$ ، در بازه‌ی $[-2, 2]$ ، کدام است؟

- ۹ (۱) ۱۰ (۲) ۱۲ (۳) ۱۷ (۴)

۱۴۵. شکل روبه‌رو، نمودار تابع $y = ax^4 + 2x^2 + bx^2$ است. a کدام است؟



- ۱ (۱) -1
 ۲ (۲) $-\frac{1}{2}$
 ۳ (۳) $-\frac{1}{4}$
 ۴ (۴) $\frac{1}{4}$

۱۴۶. تقعر منحنی به معادله‌ی $y = x\sqrt{x^2 + 2}$ در بازه‌ی $(a, +\infty)$ ، روبه بالا است. کم‌ترین مقدار a کدام است؟

- صفر (۱) -1 (۲) 1 (۳) $-\infty$ (۴)

۱۴۷. دو ضلع یک مربع منطبق بر دو خط به معادلات $2x - 2y = 3$ و $y = x + 1$ هستند، مساحت این مربع کدام است؟

- ۱ (۱) $\frac{9}{8}$
 ۲ (۲) $\frac{9}{4}$
 ۳ (۳) $\frac{25}{8}$
 ۴ (۴) $\frac{25}{4}$

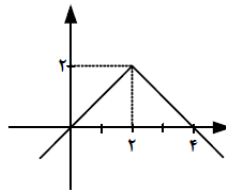
۱۴۸. سهمی به کانون $F(2, 4)$ و خط هادی به معادله‌ی $x = -1$ ، محور x ‌ها را با کدام طول قطع می‌کند؟

- ۱ (۱) $\frac{17}{6}$
 ۲ (۲) $\frac{19}{6}$
 ۳ (۳) $\frac{10}{3}$
 ۴ (۴) $\frac{11}{3}$

۱۴۹. مختصات دوسر قطر یک بیضی $(-1, 3)$ و $(-1, -1)$ است. این بیضی از نقطه‌ی $(2, -4)$ می‌گذرد. خروج از مرکز آن کدام است؟

- ۱ (۱) $\frac{\sqrt{2}}{3}$
 ۲ (۲) $\frac{\sqrt{2}}{2}$
 ۳ (۳) $\frac{\sqrt{6}}{3}$
 ۴ (۴) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

۱۵۰. با توجه به شکل روبه‌رو، حاصل $\int_0^4 (2 - |x - 2|) dx$ کدام است؟



۴ (۴)

۳/۵ (۳)

۳ (۲)

۲ (۱)

۱۵۱. با شرط $x \neq k\pi + \frac{\pi}{4}$ ، حاصل $\int \frac{\cos 2x}{\cos x - \sin x} dx$ کدام است؟

$-\sin x - \cos x + c$ (۴)

$-\sin x + \cos x + c$ (۳)

$\sin x - \cos x + c$ (۲)

$\sin x + \cos x + c$ (۱)

پاسخ تشریحی سؤالات آزمون سراسری ۱۳۹۲ (رشته‌ی علوم تجربی)

۱۲۶. گزینه‌ی (۴).

جمله‌ی دوم	جمله‌ی پنجم	جمله‌ی دوازدهم
$a + d$	$a + 4d$	$a + 11d$
x	y	z

هندسی: $y = xz \Rightarrow (a + 4d)^2 = (a + d)(a + 11d) \Rightarrow a^2 + 8ad + 16d^2 = a^2 + 12ad + 11d^2$

$\Rightarrow 5d^2 - 4ad = 0 \Rightarrow d(5d - 4a) = 0 \Rightarrow d = \frac{4a}{5}, d = 0$ (غ‌ق)

$x = a + d = a + \frac{4a}{5} = \frac{9a}{5}$; $y = a + 4d = a + \frac{16a}{5} = \frac{21a}{5}$; $z = a + 11d = a + \frac{44a}{5} = \frac{49a}{5}$

$q = \frac{\frac{21a}{5}}{\frac{9a}{5}} = \frac{21}{9} = \frac{7}{3}$

۱۲۷. گزینه‌ی (۴).

$f(x) = \sqrt{2x - x^2} \Rightarrow 2x - x^2 \geq 0 \Rightarrow x(2 - x) \geq 0$

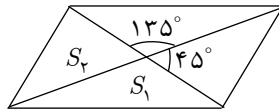
x	$-\infty$	0	2	$+\infty$
$2x - x^2$	$-$	0	$+$	$-$

$\Rightarrow D_f = [0, 2]$

$g(x) = 2 - x \Rightarrow D_g = \mathbb{R} \Rightarrow D_{f \circ g} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\} = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq 2 - x \leq 2\}$

$= \{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leq -x \leq -1\} = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leq x \leq 2\} = [1, 2]$

۱۲۸. گزینه‌ی (۲).



$S_1 = \frac{1}{2} ab \sin \theta = \frac{1}{2} \times 6 \times 4 \times \sin 135^\circ = \frac{1}{2} \times 6 \times 4 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 6\sqrt{2}$

$S_2 = \frac{1}{2} ab \sin \theta = \frac{1}{2} \times 6 \times 4 \times \sin 45^\circ = \frac{1}{2} \times 6 \times 4 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 6\sqrt{2}$

مساحت متوازی‌الاضلاع $= 2S_1 + 2S_2 = 2 \times 6\sqrt{2} + 2 \times 6\sqrt{2} = 24\sqrt{2}$

۱۲۹. گزینه‌ی (۴).

تعداد طریق $= \binom{5}{3} \binom{4}{1} \binom{4}{1} \binom{4}{1} = \frac{5!}{3!2!} \times \frac{4!}{1!3!} \times \frac{4!}{1!3!} \times \frac{4!}{1!3!} = 10 \times 4 \times 4 \times 4 = 640$

۱۳۰. گزینه‌ی (۱).

مرکز دسته	۷	۸	۹	۱۰	۱۱
فراوانی تجمعی	۸	۲۴	۴۴	۶۸	۸۰
فراوانی	۸	۱۶	۲۰	۲۴	۱۲
$f_k x_k$	۵۶	۱۲۸	۱۸۰	۲۴۰	۱۳۲

$\bar{X} = \frac{\sum_{k=1}^n f_k x_k}{\sum_{k=1}^n f_k} = \frac{56 + 128 + 180 + 240 + 132}{8 + 16 + 20 + 24 + 12} = \frac{736}{80} = 9.2$

۱۳۱. گزینه ی (۴).

$$x_1, x_2, \dots, x_n \Rightarrow \bar{X} = 12 \quad ; \quad \sigma_X = \sigma \Rightarrow C.V = \frac{\bar{X}}{\sigma} \times 100 = \frac{12}{\sigma} \times 100$$

$$2x_1 + 2, x_2 + 2, \dots, x_n + 2 \Rightarrow \overline{2X+2} = 2\bar{X} + 2 = 2 \times 12 + 2 = 26 \quad ; \quad \sigma_{2X+2} = 2\sigma_X = 2\sigma$$

$$\Rightarrow C.V' = \frac{\overline{2X+2}}{\sigma_{2X+2}} \times 100 = \frac{26}{2\sigma} \times 100$$

$$\frac{C.V}{C.V'} = \frac{\frac{12}{\sigma} \times 100}{\frac{26}{2\sigma} \times 100} = \frac{12}{26} = \frac{12 \times 2\sigma}{26 \times \sigma} = \frac{24}{26} = \frac{12}{13}$$

۱۳۲. گزینه ی (۳).

$$A = \{(1, 2), (2, 1), (2, 2), (2, 6), (6, 2), (3, 5), (5, 3), (4, 4), (6, 6)\}$$

$$n(A) = 9 \quad ; \quad n(S) = 6^2 = 36 \Rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$$

۱۳۳. گزینه ی (۱). تعداد شماره های فرد از ۱ تا ۵ برابر ۳ تا، و تعداد شماره های زوج از ۱ تا ۵ برابر ۲ تا است. چون تعداد شماره های فرد دقیقاً یکی بیش تر از تعداد شماره های زوج است، پس احتمال مورد نظر برابر است با:

$$\text{احتمال مورد نظر} = \frac{2!2!}{5!} = \frac{6 \times 2}{120} = \frac{1}{10} = 0.1$$

۱۳۴. گزینه ی (۱).

$$\left| \frac{x-2}{2x+1} \right| > 1 \Rightarrow \frac{x-2}{2x+1} > 1 \quad \text{یا} \quad \frac{x-2}{2x+1} < -1$$

$$\frac{x-2}{2x+1} > 1 \Rightarrow \frac{x-2}{2x+1} - 1 > 0 \Rightarrow \frac{x-2-2x-1}{2x+1} > 0 \Rightarrow \frac{-x-3}{2x+1} > 0$$

$$-x-3 = 0 \Rightarrow x = -3 \quad ; \quad 2x+1 = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{2}$$

x	$-\infty$	-3	$-\frac{1}{2}$	$+\infty$	
$\frac{-x-3}{2x+1}$	$-$	$+$	$-$	$+$	$\Rightarrow x \in (-3, -\frac{1}{2})$

$$\frac{x-2}{2x+1} < -1 \Rightarrow \frac{x-2}{2x+1} + 1 < 0 \Rightarrow \frac{x-2+2x+1}{2x+1} < 0 \Rightarrow \frac{3x-1}{2x+1} < 0$$

$$3x-1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{3} \quad ; \quad 2x+1 = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{2}$$

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$+\infty$	
$\frac{-x-1}{2x+1}$	$+$	$-$	$+$	$-$	$\Rightarrow x \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{3})$

$$\Rightarrow x \in (-3, -\frac{1}{2}) \quad \text{یا} \quad x \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{3}) \Rightarrow x \in (-3, -\frac{1}{2}) \cup (-\frac{1}{2}, \frac{1}{3})$$

۱۳۵. گزینه ی (۲).

$$f \circ g(x) = f(g(x)) = f(x+2) = (2(x+2)-2)^2 = (2x+1)^2$$

$$f \circ g(x) = f(x) \Rightarrow (2x+1)^2 = (2x-2)^2 \Rightarrow 2x+1 = \pm(2x-2)$$

این حالت هرگز اتفاق نمی افتد.

$$2x+1 = 2x-2 \Rightarrow 1 = -2 \Rightarrow \text{این حالت هرگز اتفاق نمی افتد.}$$

۱۳۶. گزینه ی (۳).

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{ax+9}{1-x+\sqrt{x+1}} = 2 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{ax}{-x} = 2 \Rightarrow -a = 2 \Rightarrow a = -2$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{ax+9}{1-x+\sqrt{x+1}} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-2x+9}{1-x+\sqrt{x+1}} = \frac{0}{0} \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-2}{-1+\frac{1}{2\sqrt{x+1}}} = \frac{-2}{-1+\frac{1}{4}} = 4$$

۱۳۷. گزینه‌ی (۴).

$$x \rightarrow 2^- \Rightarrow 1 \leq x < 2 \Rightarrow [x] = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (3x - [x]) = 6 - 1 = 5 \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (x + 2) = 4$$

چون $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$ ، پس حد تابع f در نقطه‌ی $x = 2$ وجود نداشته؛ و لذا این تابع در نقطه‌ی $x = 2$ نمی‌تواند پیوسته باشد. لذا به‌ازای هیچ مقدار a تابع نمی‌تواند در نقطه‌ی $x = 2$ پیوسته باشد.

۱۳۸. گزینه‌ی (۳).

$$P(\text{مهره‌ی دوم سفید و مهره‌ی اول سفید}) + P(\text{مهره‌ی دوم سفید و مهره‌ی اول سیاه}) = P(\text{مهره‌ی دوم سفید})$$

$$= \frac{9}{15} \times \frac{6}{14} + \frac{6}{15} \times \frac{5}{14} = \frac{54 + 30}{210} = \frac{84}{210} = \frac{42}{105} = \frac{6}{15} = \frac{2}{5}$$

۱۳۹. گزینه‌ی (۲).

$$P(\text{فقط به ۳ پرسش پاسخ صحیح بدهد}) = \binom{5}{3} \times \left(\frac{1}{5}\right)^3 \times \left(\frac{4}{5}\right)^2 = 10 \times \frac{4^2}{5^5} = 2 \times \frac{4^2}{5^4} = \frac{32}{625} = 0.0512$$

۱۴۰. گزینه‌ی (۱).

$$y = 2 - \sqrt{x-1} \Rightarrow \sqrt{x-1} = 2 - y \Rightarrow x - 1 = (2 - y)^2 \Rightarrow x - 1 = 4 - 4y + y^2$$

$$\Rightarrow x = y^2 - 4y + 5 \Rightarrow f^{-1}(x) = x^2 - 4x + 5$$

از طرفی دامنه‌ی تعریف تابع $f(x) = 2 - \sqrt{x-1}$ برابر $[1, +\infty)$ است، پس

$$x \in [1, +\infty) \Rightarrow x \geq 1 \Rightarrow x - 1 \geq 0 \Rightarrow \sqrt{x-1} \geq 0 \Rightarrow -\sqrt{x-1} \leq 0 \Rightarrow 2 - \sqrt{x-1} \leq 2$$

$$\Rightarrow y \leq 2 \Rightarrow R_f = (-\infty, 2] \Rightarrow D_{f^{-1}} = (-\infty, 2] \Rightarrow x \leq 2$$

۱۴۱. گزینه‌ی (۴).

$$t = 0 \Rightarrow f(0) = 1400 \Rightarrow Ae^0 = 1400 \Rightarrow A = 1400 \Rightarrow f(t) = 1400e^{0.04t}$$

$$f(t) = 7000 \Rightarrow 1400e^{0.04t} = 7000 \Rightarrow 14e^{0.04t} = 70 \Rightarrow e^{0.04t} = \frac{70}{14} \Rightarrow e^{0.04t} = 5 \Rightarrow 0.04t = \ln 5$$

$$\Rightarrow 0.04t = 1.6094 \Rightarrow 4t = 160.94 \Rightarrow t = \frac{160.94}{4} = 40.235$$

۱۴۲. گزینه‌ی (۴).

$$\sin^2 x - \cos^2 x = \sin^2 \frac{\pi}{4} \Rightarrow (\sin^2 x - \cos^2 x) \cdot (\sin^2 x + \cos^2 x) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2$$

$$\Rightarrow \sin^2 x - \cos^2 x = \frac{1}{2} \Rightarrow -\cos 2x = \frac{1}{2} \Rightarrow \cos 2x = -\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \cos 2x = \cos \frac{2\pi}{3} \Rightarrow 2x = 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3} \Rightarrow x = k\pi \pm \frac{\pi}{3}$$

۱۴۳. گزینه‌ی (۱).

$$y = \ln \sqrt{\frac{\sin x}{1 + \cos x}} \Rightarrow y = \frac{1}{2} \ln \frac{\sin x}{1 + \cos x} = \frac{1}{2} \ln(\sin x) - \frac{1}{2} \ln(1 + \cos x)$$

$$x = \frac{\pi}{4} \Rightarrow y = \frac{1}{2} \ln(\sin \frac{\pi}{4}) - \frac{1}{2} \ln(1 + \cos \frac{\pi}{4}) = 0 \Rightarrow A(\frac{\pi}{4}, 0) \text{ نقطه‌ی تماس}$$

$$y = \frac{1}{2} \ln(\sin x) - \frac{1}{2} \ln(1 + \cos x) \Rightarrow y' = \frac{\cos x}{2 \sin x} - \frac{-\sin x}{2(1 + \cos x)} = \frac{\cos x}{2 \sin x} + \frac{\sin x}{2 + 2 \cos x}$$

$$m = y'(\frac{\pi}{4}) = \frac{\cos \frac{\pi}{4}}{2 \sin \frac{\pi}{4}} + \frac{\sin \frac{\pi}{4}}{2 + 2 \cos \frac{\pi}{4}} = 0 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\text{معادله‌ی خط مماس: } y - y_A = m(x - x_A) \Rightarrow y - 0 = \frac{1}{2}(x - \frac{\pi}{4}) \Rightarrow y = \frac{1}{2}x - \frac{\pi}{8} \Rightarrow \text{عرض از مبدأ} = -\frac{\pi}{8}$$

۱۴۴. گزینه ی (۲).

$$y = x^3 - 3x^2 - 9x + 5 \Rightarrow y' = 3x^2 - 6x - 9$$

$$y' = 0 \Rightarrow 3x^2 - 6x - 9 = 0 \Rightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \Rightarrow (x+1)(x-3) = 0 \Rightarrow x = -1, x = 3 \notin (-2, 2)$$

$$x = -2 \Rightarrow y = (-2)^3 - 3 \times (-2)^2 - 9 \times (-2) + 5 = -8 - 12 + 18 + 5 = 3$$

$$x = -1 \Rightarrow y = (-1)^3 - 3 \times (-1)^2 - 9 \times (-1) + 5 = -1 - 3 + 9 + 5 = 10$$

$$x = 2 \Rightarrow y = 2^3 - 3 \times 2^2 - 9 \times 2 + 5 = 8 - 12 - 18 + 5 = -17$$

x	-2	-1	2	$\Rightarrow \max f = 10$
$f(x)$	3	10	-17	

۱۴۵. گزینه ی (۲).

$$y = ax^4 + 2x^3 + bx^2 \Rightarrow y' = 4ax^3 + 6x^2 + 2bx$$

با توجه به نمودار تابع $y = ax^4 + 2x^3 + bx^2$ نتیجه می شود که این تابع در نقطه ی $x = 0$ هیچ اکسترممی ندارد، و فقط جهت تقعر آن در نقطه ی $x = 0$ عوض می شود، لذا $x = 0$ باید ریشه ی مضاعف معادله ی $y' = 0$ باشد، در نتیجه، $b = 0$. در نتیجه، مشتق تابع به صورت زیر درمی آید.

$$y' = 4ax^3 + 6x^2 = 2x^2(2ax + 3)$$

از طرفی چون نمودار تابع در نقطه ی $x = 3$ دارای ماکزیمم نسبی است، پس مشتق تابع باید به ازای $x = 3$ برابر صفر باشد. لذا

$$y'_{(3)} = 0 \Rightarrow 2 \times 3^2(2a \times 3 + 3) = 0 \Rightarrow 18 \times (6a + 3) = 0 \Rightarrow 6a = -3 \Rightarrow a = -\frac{1}{2}$$

۱۴۶. گزینه ی (۱).

$$y = x\sqrt{x^2 + 2} \Rightarrow y' = \sqrt{x^2 + 2} + \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + 2}} = \frac{2x^2 + 2}{\sqrt{x^2 + 2}}$$

$$\Rightarrow y'' = \frac{4x\sqrt{x^2 + 2} - \frac{2x^2 + 2}{\sqrt{x^2 + 2}}}{x^2 + 2} = \frac{4x^2 + 8x - 2x^2 - 2x}{(x^2 + 2)\sqrt{x^2 + 2}} = \frac{2x^2 + 6x}{(x^2 + 2)\sqrt{x^2 + 2}}$$

$$y'' = 0 \Rightarrow 2x^2 + 6x = 0 \Rightarrow 2x(x + 3) = 0 \Rightarrow x = 0$$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f''(x)$	-	0	+
$f(x)$	∩	∩	∪
	محدب	∩	مقعر

با توجه به جدول تعیین علامت تابع f'' نتیجه می شود که تابع $y = x\sqrt{x^2 + 2}$ در بازه ی $(0, +\infty)$ مقعر است. در نتیجه، $a = 0$.

۱۴۷. گزینه ی (۳).

$$\begin{cases} 2x - 2y = 3 \\ y = x + 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x - 2y - 3 = 0 \\ 2x - 2y + 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = 1 \Rightarrow \text{دو خط } y = x + 1 \text{ و } 2x - 2y = 3 \text{ موازی هستند.}$$

چون دو ضلع مربع منطبق بر دو خط به معادلات $2x - 2y = 3$ و $y = x + 1$ هستند، پس طول ضلع مربع برابر فاصله ی این دو خط موازی خواهد بود. و در نتیجه، مساحت مربع مورد نظر برابر است با:

$$S = a \times a = a^2 = d^2 \quad ; \quad d = \frac{|C - D|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{|-3 - 2|}{\sqrt{2^2 + 2^2}} = \frac{5}{\sqrt{8}} \Rightarrow d^2 = \frac{25}{8} \Rightarrow S = d^2 = \frac{25}{8}$$

۱۴۸. گزینه ی (۲). چون خط هادی این سهمی به صورت $x = -1$ است، پس این سهمی، یک سهمی افقی رو به راست می باشد، در نتیجه،

$$x = -1 \quad ; \quad F(2, 4) \Rightarrow h - p = -1 \quad ; \quad h + p = 2 \quad ; \quad k = 4$$

$$\begin{cases} h - p = -1 \\ h + p = 2 \end{cases}$$

$$2h = 1 \Rightarrow h = \frac{1}{2} \quad ; \quad \frac{1}{2} - p = -1 \Rightarrow p = \frac{3}{2}$$

$$\text{معادله ی سهمی: } (y - k)^2 = 4p(x - h) \Rightarrow (y - 4)^2 = 4 \times \frac{3}{2} \times (x - \frac{1}{2}) = (y - 4)^2 = 6x - 3$$

$$\text{محل تلاقی با محور } x \text{ ها: } y = 0 \Rightarrow (0 - 4)^2 = 6x - 3 \Rightarrow 6x - 3 = 16 \Rightarrow 6x = 19 \Rightarrow x = \frac{19}{6}$$

۱۴۹. گزینه ی (۳). چون مختصات، دو سر قطر کوچک بیضی به صورت $(-1, 3)$ و $(-1, -1)$ است، و مؤلفه ی اول آن‌ها برابر است، پس بیضی مورد نظر، یک بیضی افقی است. لذا $h = -1$ و

$$(-1, -1) \quad ; \quad (-1, 3) \Rightarrow \begin{cases} k + b = 3 \\ k - b = -1 \\ 2k = 2 \end{cases} \Rightarrow k = 1 \quad ; \quad 1 + b = 3 \Rightarrow b = 2$$

در نتیجه، معادله ی سهمی به صورت زیر است.

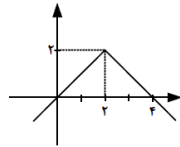
$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{(x+1)^2}{a^2} + \frac{(y-1)^2}{4} = 1$$

از طرفی چون این بیضی از نقطه ی $(-4, 2)$ می‌گذرد، پس

$$(-4, 2) \Rightarrow \frac{(-4+1)^2}{a^2} + \frac{(2-1)^2}{4} = 1 \Rightarrow \frac{9}{a^2} + \frac{1}{4} = 1 \Rightarrow \frac{9}{a^2} = \frac{3}{4} \Rightarrow a^2 = 12$$

$$c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{12 - 4} = \sqrt{8} \Rightarrow e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{8}}{\sqrt{12}} = \frac{\sqrt{8}}{\sqrt{12}} = \sqrt{\frac{8}{12}} = \sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

۱۵۰. گزینه ی (۴). با توجه به شکل زیر، حاصل $\int_0^4 (2 - |x - 2|) dx$ برابر مساحت مثلثی به قاعده ی ۴ و ارتفاع ۲ است. در نتیجه،



$$\int_0^4 (2 - |x - 2|) dx = S = \frac{1}{2} \times 2 \times 4 = 4$$

راه حل دوم:

$$\begin{aligned} \int_0^4 (2 - |x - 2|) dx &= \int_0^2 (2 + (x - 2)) dx + \int_2^4 (2 - x - 2) dx = \int_0^2 x dx + \int_2^4 (4 - x) dx \\ &= \frac{1}{2} x^2 \Big|_0^2 + \left(4x - \frac{1}{2} x^2 \right) \Big|_2^4 = (2 - 0) + (8 - 6) = 4 \end{aligned}$$

۱۵۱. گزینه ی (۲). با شرط $x \neq k\pi + \frac{\pi}{4}$ ، حاصل $\int \frac{\cos 2x}{\cos x - \sin x} dx$ برابر است با:

$$\begin{aligned} \int \frac{\cos 2x}{\cos x - \sin x} dx &= \int \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cos x - \sin x} dx = \int \frac{(\cos x - \sin x) \cdot (\cos x + \sin x)}{\cos x - \sin x} dx \\ &= \int (\cos x + \sin x) dx = \sin x - \cos x + c \end{aligned}$$